# Что такое „релятивистское каноническое квантование“?

Д. А. Арбатский[*]

Январь 2005 г.

**Аннотация**

Цель данного обзора — дать максимально доступное описание схемы квантования релятивистских полей, которая получила название *релятивистское каноническое квантование* (РКК). Здесь не даётся полного точного изложения данной схемы. Но с помощью данного обзора любой физик, даже не являющийся специалистом по релятивистской квантовой теории, сможет получить общее представление о содержании РКК, о его связи с другими существующими подходами, о его новизне и о его плодотворности.

## Инвариантный гамильтонов формализм

Общеизвестно, что для построения квантованных полей оказывается полезным вычислять скобки Пуассона от полевых величин. А скобка Пуассона является понятием гамильтонова формализма.

Если перед нами стоит задача создать полностью релятивистски-инвариантную схему квантования полей, то хотелось бы, прежде всего, сформулировать гамильтонов формализм в релятивистски-инвариантной форме.

Эту задачу наука решала удивительно долго. Фактически, считалось общепринятым, что гамильтонов формализм нельзя сформулировать в явно релятивистски-инвариантной форме.

Однако с развитием методов симплектической геометрии, гамильтонов формализм удалось сформулировать на основе таких базовых понятий, у которых обнаружились релятивистски-инвариантные аналоги. Вот эти понятия: фазовое пространство, симплектическая структура на фазовом пространстве, каноническое действие однопараметрической группы временных сдвигов на фазовом пространстве.

У релятивистских полей аналогами этих понятий выступают, соответственно: инвариантное фазовое пространство, симплектическая структура на инвариантном фазовом пространстве, каноническое действие группы Пуанкаре на инвариантном фазовом пространстве.

**Инвариантное фазовое пространство.** Точка обычного фазового пространства характеризует динамическое состояние системы в данный момент времени. Если для каждого начального состояния системы уравнения движения разрешимы, причём единственным образом, то можно говорить о взаимно-однозначном соответствии между фазовым пространством системы (для заданного момента времени) и множеством решений уравнений движения. Вот это множество решений уравнений движения и называется *инвариантным фазовым пространством.*

Инвариантное фазовое пространство обладает естественной структурой многообразия. Если в качестве динамической системы выступает релятивистское поле, то в качестве возможных координатных функций на инвариантном фазовом пространстве могут выступать значения величины поля в фиксированных точках пространства-времени.

Таким образом, с точки зрения структуры инвариантного фазового пространства, возможные значения поля в фиксированной точке пространства-времени — лишь одна из огромного множества функций на инвариантном фазовом пространстве.

**Симплектическая структура.** Отсутствие на инвариантом фазовом пространстве каких-либо выделенных координатных функций, с которыми следовало бы связывать точки этого пространства, казалось бы, превращает его в бессодержательную абстракцию.

[*]http://daarb.narod.ru/ , http://wave.front.ru/

Это однако не так. Ибо можно показать, что инвариантное фазовое пространство, как и обычное, обладает симплектической структурой.

При сопоставлении точек инвариантного фазового пространства с точками обычного фазового пространства, взятого в фиксированный момент времени, оказывается, что их симплектические структуры переходят друг в друга. Отсюда ясно, что существование симплектической структуры на инвариантном фазовом пространстве — факт, являющийся *обобщением* теорем Лиувилля и Пуанкаре.

Что касается скобок Пуассона — то они определяются через симплектическую структуру. Математическое определение их, по сути, не меняется. Но поскольку это определение применяется к объектам иной природы, оказывается, что такие скобки Пуассона являются глубоким обобщением обычных. Например, их можно вычислять между значениями поля в *разные* моменты времени.

**Действие группы Пуанкаре.** Если исходный лагранжиан поля релятивистски-инвариантен, то и уравнения движения релятивистски-инвариантны. То есть при любом преобразовании из группы Пуанкаре решение уравнений движения переходит в решение.

Иначе говоря, группа Пуанкаре *действует* на инвариантном фазовом пространстве.

Поскольку симплектическая структура на инвариантном фазовом пространстве определяется через лагранжиан, она оказывается инвариантной относительно действия группы Пуанкаре. То есть группа Пуанкаре действует на инвариантном фазовом пространстве канонически.

**Полевые представления.** Для целей квантования можно ограничиться линейными полями. Эти поля характеризуются тем, что линейная комбинация решений уравнений движения является решением. С точки зрения инвариантного фазового пространства, можно сказать, что в этом случае оно обладает естественной линейной структурой.

Группа Пуанкаре эту линейную структуру сохраняет. Таким образом, группа Пуанкаре действует на инвариантном фазовом пространстве как группа *симплектических* преобразований.

Поскольку для целей квантования оказывается важным изучить это действие группы Пуанкаре методами теории групп, полезной оказывается ещё такая терминология. Говорят, что линейные релятивистские поля задают *симплектические представления* группы Пуанкаре. Эти представления (а также их сопряжённые и комплексифицированные) называют *полевыми представлениями.*

Мы не будем здесь углубляться в теорию полевых представлений. Заметим лишь, что она во многом аналогична теории Вигнера-Макки унитарных представлений группы Пуанкаре, но при этом она играет для теории квантованных полей более фундаментальную роль.

## Конструкция квантованного поля

Итак, теперь мы уже имеем все необходимые структуры, из которых *конструируется* квантованное поле. Вот эти структуры: инвариантное фазовое пространство линейного классического поля, симплектическая структура на этом пространстве, подходящим образом классифицированные инвариантные (относительно группы Пуанкаре) подпространства полевого представления, а также подходящее множество классических полевых величин, которые „квантуются“.

В данном обзоре мы опустим описание самой конструкции квантованного поля. С точки зрения математика-алгебраиста все используемые при этом методы хорошо известны. Подобные методы применяются при конструировании универсальных обёртывающих алгебр для алгебр Ли, при конструировании грассмановых алгебр и т. п.

Приведём здесь перечень некоторых наиболее важных свойств обсуждаемого метода квантования.

- Квантование производится *конструктивно.* Свойства квантованного поля (например, коммутационные соотношения) при этом не постулируются, а вытекают из самой конструкции.
- Конструкция явно релятивистски-инвариантна.
- Метод даёт возможность увидеть, каким образом у квантовой системы появляются те же интегралы движения, связанные с наличием группы симметрии, что и у исходной классической системы. Таким образом, удаётся сформулировать математически строгий квантовый аналог теоремы Нётер.

- Метод позволяет также по-новому увидеть происхождение дискретных симметрий. В том числе *антиунитарного* преобразования обращения времени.
- Данная схема квантования включает в себя совершенно естественно возможность квантования в пространстве с индефинитным скалярным произведением.

## Применение к электромагнитному полю

Проблема квантования электромагнитного поля была одним из главных стимулов для создания РКК.

Давно известно, что для целей квантовой теории электромагнитное поле нужно описывать с помощью векторного потенциала. Известно также, что при попытке квантования такого векторного поля возникает необходимость рассматривать индефинитное скалярное произведение в квантовом пространстве состояний.

Индефинитное скалярное произведение, в отличие от положительно-определённого случая, не задаёт топологии.

Эта проблема до сих пор просто замалчивалась (в учебной литературе). По аналогии с некоторыми другими полями считалось, что пространство состояний квантованного электромагнитного поля *должно* быть гильбертовым, по крайней мере с топологической точки зрения.

Метод РКК показал, что это *не так*.

## Другие применения

Метод РКК, разумеется, применим и к другим полям (например, к скалярному, к электронно-позитронному и т. п.).

Известно, что, скажем, скалярное поле имеет единственное квантование в гильбертовом пространстве. Такое квантование, конечно, уже давно построено. И метод РКК (если ограничиться положительно-определённым скалярным произведением) *не может* приводить к другому квантованию.

Конечно, метод РКК приводит в этом случае к эквивалентному квантованию. Но несомненное достоинство метода состоит в том, что само построение при этом происходит в рамках общей схемы, без каких бы то ни было „догадок“, „классических аналогий“ и т. п.

Так происходит потому, что метод РКК является *строгой математической конструкцией*.

## Список литературы

[1] Д. А. Арбатский „О квантовании электромагнитного поля“ (2002),
http://daarb.narod.ru/qed-rus.html , http://wave.front.ru/qed-rus.html , arXiv:math-ph/0402003 .
[анг.: D. A. Arbatsky “On quantization of electromagnetic field” (2002),
http://daarb.narod.ru/qed-eng.html , http://wave.front.ru/qed-eng.html , arXiv:math-ph/0402003 .]