Принцип определённости (обзор)

Д. А. Арбатский*

Август 2006 г.

Аннотация

Принцип определённости (2005) позволил обобщить и объеденить вместе как принцип неопределённости Гейзенберга (1927), так и соотношение Мандельштама-Тамма (1945). Он оказался приложимым к любым квантовым системам, включая релятивистские квантовые поля. Можно даже предположить, что он в итоге окажется более фундаментальным, чем квантовая механика и квантовая теория поля.

В рамках ортодоксальной квантовой теории принцип определённости может рассматриваться как математическая теорема. Именно такой подход взят за основу в настоящем обзоре. При этом принцип неопределённости Гейзенберга и соотношение Мандельштама-Тамма выводятся как следствия принципа определённости. Ещё одним интересным следствием оказывается простое соотношение неопределённости для угла и момента импульса, которое, однако, не было ранее известно.

В широком смысле, принцип определённости является не только математической теоремой, но и гносеологическим принципом. Этот принцип существенно дополняет философию квантовой механики.

Исторические комментарии

Принцип неопределённости. Читателю, интересующемуся историей принципа *неопределённости*, рекомендуется познакомиться, например, с обзором [1]. Здесь же будут даны только некоторые замечания, важные с точки зрения дальнейшего изложения.

Принцип неопределённости был предложен Гейзенбергом в 1927 г. [2]. Сам Гейзенберг его сформулировал так:

- Чем более точно определена координата, тем менее точно в то же время известен импульс, и наоборот.

При этом для неточностей координаты и импульса было указано качественное соотношение вида:

$$\Delta_{\rangle} X \, \Delta_{\rangle} P \;\sim\; \hbar \; . \qquad (1)$$

Гейзенберг, рассматривая конкретные примеры, дал именно качественную формулировку. При этом самому понятию „неточности“ он не дал точного определения.

Вскоре Кеннард [3] дал точную математическую формулировку для случая координаты и импульса. Предполагая справедливость „коммутационного соотношения“ $[X, P] = i\hbar$, он показал, что для произвольного квантового состояния $\rangle$ имеет место соотношение:

$$\Delta_{\rangle} X \, \Delta_{\rangle} P \;\geqslant\; \frac{\hbar}{2} \; . \qquad (2)$$

При этом

$$\Delta_{\rangle} X = \Big\langle \big(X - \langle X \rangle \big)^2 \Big\rangle^{1/2} \; , \qquad \Delta_{\rangle} P = \Big\langle \big(P - \langle P \rangle \big)^2 \Big\rangle^{1/2} \; .$$

То есть, в соответствии с вероятностной интерпретацией квантовой механики, под неточностями координаты и импульса предлагалось понимать среднеквадратичные отклонения этих наблюдаемых.

Ввиду исключительной простоты доказательства, соотношение (2) стало общепризнанным математическим выражением принципа неопределённости и попало во все учебники квантовой механики. При этом всевозможная критика (в том числе в плане соответствия практическому эксперименту) [1] оказалась более или

*http://daarb.narod.ru/ , http://wave.front.ru/

менее проигнорированной. Однако скоро мы увидим, что принцип определённости позволяет получать альтернативные неравенства, описывающие принцип неопределённости, которые оказываются более содержательными с практической точки зрения.

Далее математическое доказательство различным образом обобщалось. При этом оно распространялось на другие пары некоммутирующих наблюдаемых. Поэтому, чтобы избежать неясности в самом термине *принцип неопределённости*, приведём здесь несколько иную, более современную и общую, формулировку этого принципа[1]:

- Если попытаться описывать динамическое состояние *квантовой* частицы методами *классической* механики, то точность такого описания принципиально ограничена. *Классическое* состояние частицы оказывается *плохо* определённым. Эта неопределённость может быть математически выражена различными неравенствами, описывающими разброс значений наблюдаемых, имеющих квазиклассический предел.

Разумеется, Гейзенберг не мог сформулировать принцип неопределённости в такой форме. Это бы противоречило логике исторического момента. Ведь в 1927 году физика переходила от классической механики к квантовой, и принцип неопределённости воспринимался как путь из старой теории в новую.

Сегодня же, когда квантовая механика уже состоялась, принцип неопределённости является всего лишь методом качественной оценки точности квазиклассического приближения. И нет никаких оснований считать этот принцип более фундаментальным, чем сам математический аппарат квантовой механики.

Соотношение Мандельштама-Тамма. Поскольку для координаты и импульса существует соотношение неопределённостей вида (1), общие соображения, связанные с теорией относительности,[2] указывают, что, по-видимому, должно существовать и соотношение неопределённостей для времени и энергии вида:

$$\Delta_{\rangle} T \, \Delta_{\rangle} H \; \sim \; \hbar \; . \tag{3}$$

Сам Гейзенберг указал на такое соотношение. Однако уже в то время было ясно [4], что с данным соотношением дело обстоит сложнее, так как не существует квантовомеханической наблюдаемой „время“, и не ясно, что же следует понимать под „неопределённостью“ времени.

Тем не менее, физикам всё же хотелось верить, что принцип неопределённости является *фундаментальным* физическим принципом, а потому попытки обосновать соотношение (3) не прекращались до самого последнего времени. При этом они в основном сводились к попыткам показать, что понятие „неопределённость времени“ является осмысленным. И это осмысление обычно проводилось путём анализа процесса измерения, то есть к анализу взаимодействия квантовой частицы с прибором типа микроскопа Гейзенберга. (подробный обзор с критическим анализом см. в [5])

Нельзя сказать, что эти попытки были безуспешными. Тем не менее, думается, такой подход не соответствует общей методологии квантовой механики. Дело в том, что аналитический аппарат квантовой механики ориентирован на изучение квантовых систем как самостоятельных физических сущностей. Этот аналитический аппарат дистанцируется от подробностей взаимодействия приборов с изучаемой системой.

В 1945 г. Мандельштам и Тамм [6] дали строгую математическую формулировку соотношения вида[3]

$$|\delta t| \, \Delta_{\rangle} H \geqslant \hbar \; . \tag{4}$$

Мандельштам и Тамм назвали это соотношение „соотношением неопределённости энергия-время в нерелятивистской квантовой механике“, поскольку, очевидно, полагали, что нашли математическое выражение принципа неопределённости для энергии и времени. Соответственно, дальнейшие попытки обосновать соотношение *неопределённости* энергия-время в основном являлись попытками показать, что величина δt в соотношении Мандельштама-Тамма может в том или ином смысле пониматься как „неопределённость“ времени.

Однако я всё же полагаю, что называть соотношение Мандельштама-Тамма соотношением *неопределённостей* нет достаточно убедительных оснований. Как было сказано выше, принцип неопределённости не более фундаментален, чем сам математический аппарат квантовой механики. Более того, анализ релятивистских

[1] Такая формулировка не только позволяет яснее понять, что же именно является „неопределённым“, но и позволяет увидеть ясно контраст с принципом *определённости*.

[2] Скоро мы однако увидим, что эти соображения *неверны*, ибо само существование принципа неопределённости связано со специфическими особенностями *нерелятивистского* приближения.

[3] Здесь оно записано несколько иначе, чтобы яснее была видна связь с дальнейшим.

квантовых систем показывает, что он *менее* фундаментален. Поэтому нет оснований считать, что фундаментальное соотношение неопределённостей вида (3) должно существовать.

Скоро мы увидим, что соотношение Мандельштама-Тамма в случае замкнутых систем является проявлением иного физического принципа, принципа *определённости*, который более фундаментален, чем принцип неопределённости Гейзенберга. При этом величина δt , фигурирующая в неравенстве (4), при переходе от представления Шрёдингера к представлению Гейзенберга (или к РКК-представлению) оказывается логарифмической координатой на группе Пуанкаре. Для некоторых целей её можно интерпретировать как „неопределённость времени“, но в этом, вообще говоря, нет нужды.

Что касается незамкнутых систем, у которых гамильтониан произвольно зависит от времени, соотношение Мандельштама-Тамма следует считать соотношением для скорости квантовой эволюции. При этом оно является вполне самостоятельным соотношением, математически *не*-эквивалентным соотношению определённости для времени и энергии.

Принцип определённости. Когда встаёт вопрос о применении соображений, связанных с теорией относительности, в квантовой механике, стоит задуматься о том, что нам вообще известно про релятивистскую инвариантность в квантовой теории.

Группой инвариантности пространства Минковского[4] является группа Пуанкаре. Именно с инвариантностью по отношению к этой группе законов природы вообще, и квантовой механики в частности, связывается понятие релятивистской инвариантности.

Все физически содержательные квантовые системы, на которые распространяется действие группы Пуанкаре, известные до сих пор, являются квантовыми полями (либо их подсистемами). При этом до 2002 года математическое конструирование квантовых полей производилось по таким рецептам[5], которые делали действие группы Пуанкаре на пространстве состояний квантованного поля скрытым. Фактически, физики довольствовались утверждением, что группа Пуанкаре действует на пространстве состояний *неявно*, по некоторым довольно сложным формулам.

С появлением релятивистского канонического квантования (РКК) [8] (для начального ознакомления рекомендуется обзор [9]) стало однако понятно, каким образом действие группы Пуанкаре переносится с пространства Минковского на пространство состояний квантованного поля.[6] Стало также очевидным следующее:

- Понятие координаты, как квантовомеханической наблюдаемой, для релятивистских квантовых систем вообще не является естественным, не говоря уже о фундаментальности. (Предпринимавшиеся в прошлом попытки введения координат для некоторых систем, например [10], представляются довольно искусственными.)

- По этой причине принцип неопределённости вообще *не может* быть фундаментальным, в плане распространения его на релятивистскую квантовую теорию.

Опираясь на методологию РКК, я сформулировал [12] принцип *определённости*:

- Если описывать динамическое состояние квантовой частицы (системы) методами *квантовой* механики, то *квантовое* состояние частицы (системы) оказывается *хорошо* определённым. Эта определённость квантового динамического состояния означает, что „малые“ пространственно-временные преобразования не могут существенно менять квантовое состояние. При этом в случае группы Пуанкаре, для преобразований, способных существенно менять квантовое состояние, справедлива оценка[7]:

$$\Delta_{\rangle} \left(-\,\delta x_\mu \, P_\mu \,+\, \tfrac{1}{2}\, \delta\omega_{\mu\nu}\, J_{\mu\nu} \right) \geqslant \hbar \ , \tag{5}$$

  где P_μ — векторный оператор энергии-импульса, $J_{\mu\nu}$ — тензорный оператор четырёхмерного момента импульса, δx_μ и $\delta\omega_{\mu\nu}$ — стандартные логарифмические координаты группы Пуанкаре.

---

[4] Четырёхмерного пространства-времени специальной теории относительности.

[5] Именно „рецептам“, поскольку формальный математический процесс вообще отсутствовал.

[6] Отличительной особенностью метода РКК является именно построение квантованных полей в рамках четырёхмерной геометрии пространства Минковского, без искусственного разделения пространства и времени.

[7] Здесь и далее по повторяющимся греческим тензорным индексам предполагается релятивистское суммирование:

$$a_\mu \, b_\mu = a_0 \, b_0 - a_1 \, b_1 - a_2 \, b_2 - a_3 \, b_3 \ .$$

.

При этом, поскольку принцип определённости является универсальным, он прекрасно работает и в обычной квантовой механике, в том числе в *нерелятивистской*. Поэтому кажется удивительным, что этот принцип не был сформулирован раньше. Этому однако есть два объяснения.

Во-первых, этот принцип формулируется естественно с использованием базовых понятий РКК. В частности, при формулировке принципа определённости понятие *динамического состояния* наиболее естественно понимать в интерпретации РКК. Эта трудность, по-видимому, являлась главной.

Во-вторых, для того, чтобы прийти к принципу определённости из обычной квантовой механики, требуется опираться на теорию квантового угла (метрики Фубини-Штуди). А существование этой метрики, хотя и несложно доказывается, отнюдь не является очевидным. Эта метрика была открыта только в 1905 году Фубини [13] и Штуди [14], и большинство физиков о ней не знают.

Математический формализм

Квантовый угол (метрика Фубини-Штуди). Рассмотрим единичную сферу $\|x\| = 1$ в обычном трёхмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$. Расстояние, измеренное по поверхности сферы, между любыми двумя точками равно углу между лучами, исходящими из начала координат и проходящими через данные точки.

Таким образом, связь углов между лучами с расстояниями на сфере делает очевидным важное свойство угла: он удовлетворяет „неравенству треугольника“:

$$\angle(a,c) \leqslant \angle(a,b) + \angle(b,c) \ . \tag{6}$$

Угол в этом примере, как известно, выражается через скалярное произведение $\langle\cdot|\cdot\rangle$ в пространстве $\mathbb{R}^3$ по формуле:

$$\angle(a,b) \ = \ \arccos\langle a|b\rangle \ .$$

Здесь в правой части формулы векторы, концы которых лежат в точках пересечения лучей a и b с единичной сферой, обозначены теми же буквами, что и сами лучи. Возможные значения угла в этом примере лежат в диапазоне от 0 до π .

Попробуем теперь рассмотреть углы не между лучами, а между прямыми, проходящими через начало координат. При этом возможные значения угла, очевидно, будут лежать в более узком диапазоне от 0 до $\pi/2$. Формула для угла в этом случае немного видоизменяется:

$$\angle(a,b) \ = \ \arccos\bigl|\langle a|b\rangle\bigr| \ . \tag{7}$$

Будет ли угол в этом случае удовлетворять неравенству треугольника (6)? Ответ на этот вопрос не кажется непосредственно очевидным, поскольку каждой прямой отвечает уже пара точек на единичной сфере. Однако элементарное логическое рассуждение позволяет свести этот пример к предыдущему. Ответ оказывается положительным.

Попробуем теперь посмотреть, каким образом обстоят дела в трёхмерном комплексном гильбертовом пространстве $\mathbb{C}^3$. Вместо вещественных прямых в этом случае мы, очевидно, имеем комплексные прямые, то есть одномерные комплексные подпространства. Каждое такое подпространство пересекается с единичной сферой $\|x\| = 1$ уже даже не по двум, а по бесконечному числу точек. Эти точки отличаются друг от друга комплексным множителем, равным по модулю единице.

Угол при этом определяется той же самой формулой (7), но скалярное произведение здесь уже соответствует пространству $\mathbb{C}^3$. Возможные значения угла, очевидно, также будут лежать в диапазоне от 0 до $\pi/2$.

Будет ли угол и в этом случае удовлетворять неравенству треугольника (6)? Ответ и на этот раз оказывается положительным. Этот факт был установлен Фубини [13] и Штуди [14] (несложное доказательство также имеется в [12]), поэтому угол между комплексными прямыми в гильбертовом пространстве называется *метрикой Фубини-Штуди*.

Выполнение неравенства треугольника, конечно, не зависит от размерности гильбертова пространства, поскольку при проверке неравенства треугольника всегда можно перейти к соответствующему трёхмерному подпространству.

Далее, поскольку в квантовой механике пространство состояний квантовой системы $\mathcal{H}$ является комплексным гильбертовым пространством, метрика Фубини-Штуди может естественным образом рассматриваться как мера различности квантовых состояний. В этом контексте мы будем называть данную метрику *квантовым углом*, поскольку это позволяет образовывать естественные словосочетания типа „квантовая угловая скорость“.

Квантовая угловая скорость. Пусть теперь нормированный вектор r зависит от вещественного параметра t: $t \in \mathbb{R}$, $r(t) \in \mathcal{H}$, $\| r(t) \| = 1$.

Определим *квантовую скорость* $v(t)$ равенством:

$$v(t) = \dot{r}(t) = \lim_{\delta t \to 0} \frac{r(t+\delta t) - r(t)}{\delta t} \ .$$

Определим также *квантовую угловую скорость* $\omega(t)$ равенством:

$$\omega(t) = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\angle \big(r(t+\delta t) \, , \, r(t) \big)}{| \, \delta t \, |} \ .$$

Чтобы выразить $\omega(t)$ через $v(t)$, разложим $v(t)$ на две ортогональные составляющие:

$$v_{\|}(t) = r(t) \, \langle r(t) | v(t) \rangle \ , \qquad v_{\perp}(t) = v(t) - v_{\|}(t) \ .$$

Данное разложение формально выглядит так же, как и соответствующее разложение в вещественном случае, хорошо известное в кинематике материальной точки. Однако на эту аналогию нельзя полагаться слишком сильно. Дело в том, что в вещественном случае наличие параллельной компоненты скорости непременно связано с приращением нормы вектора. В рассматриваемом же нами комплексном случае вектор предполагается всегда сохраняющим единичную норму. Наличие же параллельной компоненты скорости оказывается связанным с возможностью домножения вектора на комплексный фазовый множитель, равный по модулю единице. Тем не менее, верна следующая

Т е о р е м а. *Квантовая угловая скорость равна норме ортогональной составляющей квантовой скорости:*

$$\omega(t) = \| \, v_{\perp}(t) \, \| \ . \tag{8}$$

Прежде чем доказывать эту теорему, заметим, что в вещественном случае равенство (8) является *определением* угловой скорости ω. При этом угол в вещественном случае *определяется* как интеграл от угловой скорости вдоль экстремальной дуги. После чего уже *определяется* тригонометрическая функция $\arccos$ для *конечных* углов.

Непосредственное перенесение такой логики на случай комплексного гильбертова пространства затруднительно, поскольку экстремальных дуг всегда много, и ни одна из них не является столь простой, чтобы появление вещественной функции $\arccos$ было геометрически очевидно.

Поэтому здесь нам приходится исследовать непосредственно бесконечно малые углы, т. е. работать вблизи особой точки функции $\arccos$. Чтобы этого избежать, мы используем равенство Парсеваля для замены $\arccos$ на $\arcsin$:

$$\begin{aligned}
\angle \big(r(t+\delta t) \, , \, r(t) \big) \ &= \ \arccos \big| \, \langle \, r(t+\delta t) \, | \, r(t) \, \rangle \, \big| \ = \\
&= \ \arcsin \big\| \, r(t+\delta t) - r(t) \, \langle \, r(t) \, | \, r(t+\delta t) \, \rangle \, \big\| \ = \\
&= \ \arcsin \big\| \, r(t+\delta t) \ - \ r(t) \ - \ r(t) \, \langle \, r(t) \, | \, r(t+\delta t) - r(t) \, \rangle \, \big\| \ = \\
&= \ \arcsin \big\| \, v(t) \, \delta t \ + \ o(\delta t) \ - \ r(t) \, \langle \, r(t) \, | \, v(t) \, \delta t + o(\delta t) \, \rangle \, \big\| \ = \\
&= \ \arcsin \Big\| \, \big(v(t) \ - \ r(t) \, \langle \, r(t) \, | \, v(t) \, \rangle \big) \, \delta t \ + \ o(\delta t) \, \Big\| \ = \\
&= \ \arcsin \big\| \, v_{\perp}(t) \, \delta t \ + \ o(\delta t) \, \big\| \ = \ \arcsin \big(\, \|v_{\perp}(t)\| \, |\delta t| \ + \ o(\delta t) \, \big) \ = \\
&= \ \|v_{\perp}(t)\| \, |\delta t| \ + \ o(\delta t) \ .
\end{aligned}$$

Деля на $|\delta t|$, получаем равенство (8). ■

Непрерывные унитарные группы. Допустим теперь, что в пространстве состояний квантовой системы имеется самосопряжённый оператор $A = A^*$. Множество унитарных операторов вида $U(\delta s) = e^{-\, i \, \delta s \, A / \hbar}$, где δs пробегает всё множество вещественных чисел, а $\hbar$ является фиксированным положительным вещественным числом (в квантовой механике это число является постоянной Планка), образует сильно непрерывную однопараметрическую унитарную группу: $U(\delta s_1) \, U(\delta s_2) \ = \ U(\delta s_1 + \delta s_2)$. Оператор A при этом называется *генератором* данной группы.

И пусть теперь вектор состояния изменяется под действием рассматриваемой группы:

$$r(\delta s) \,=\, |\,\delta s\,\rangle \,=\, U(\delta s)\,\rangle \,=\, e^{-\,i\,\delta s\,A/\hbar}\,\rangle\;.$$

Здесь $|\,\delta s\,\rangle \in \mathcal{H}$ — другое обозначение вектора состояния при параметре, равном δs ; $\rangle \in \mathcal{H}$ — фиксированный кет-вектор состояния.

Будем полагать, что функция $r(\delta s)$ дифференцируема. Тогда квантовая скорость выражается формулой:

$$v(\delta s) \,=\, \tfrac{1}{i\hbar}\,A\,e^{-\,i\,\delta s\,A/\hbar}\,\rangle \,=\, \tfrac{1}{i\hbar}\,A\,|\,\delta s\,\rangle\;.$$

Среднее значение оператора A не зависит от параметра:

$$\overline{A} \,=\, \langle\,\delta s\,|\,A\,|\,\delta s\,\rangle \,=\, \langle\,e^{+\,i\,\delta s\,A/\hbar}\,A\,e^{-\,i\,\delta s\,A/\hbar}\,\rangle \,=\, \langle\,A\,e^{+\,i\,\delta s\,A/\hbar}\,e^{-\,i\,\delta s\,A/\hbar}\,\rangle \,=\, \langle\,A\,\rangle\;.$$

Поэтому составляющие квантовой скорости могут быть просто записаны как:

$$v_{\|}(\delta s) \,=\, |\,\delta s\,\rangle\,\langle\,\delta s\,|\,\tfrac{1}{i\hbar}\,A\,|\,\delta s\,\rangle \,=\, \tfrac{1}{i\hbar}\,\overline{A}\,|\,\delta s\,\rangle$$
$$v_{\perp}(\delta s) \,=\, \tfrac{1}{i\hbar}\,\left(A-\overline{A}\right)\,|\,\delta s\,\rangle\;.$$

Квантовая угловая скорость оказывается также независящей от времени:

$$\omega(\delta s) \,=\, \|\,v_{\perp}(\delta s)\,\| \,=\, \tfrac{1}{\hbar}\,\langle\,\delta s\,|\,\left(A-\overline{A}\right)^2\,|\,\delta s\,\rangle^{1/2} \,=\, \tfrac{1}{\hbar}\,\langle\,e^{+\,i\,\delta s\,A/\hbar}\,\left(A-\overline{A}\right)^2\,e^{-\,i\,\delta s\,A/\hbar}\,\rangle^{1/2} \,=$$
$$=\, \tfrac{1}{\hbar}\,\langle\,\left(A-\overline{A}\right)^2\,e^{+\,i\,\delta s\,A/\hbar}\,e^{-\,i\,\delta s\,A/\hbar}\,\rangle^{1/2} \,=\, \tfrac{1}{\hbar}\,\langle\,\left(A-\overline{A}\right)^2\,\rangle^{1/2} \,=\, \tfrac{1}{\hbar}\,\Delta_{\rangle}A\;.$$

Здесь $\Delta_{\rangle}A$ является сокращённым обозначением для среднеквадратичного отклонения A в состоянии $\rangle$.

Таким образом, доказана важная

Т е о р е м а. *Среднеквадратичное отклонение генератора однопараметрической унитарной группы равно квантовой угловой скорости, умноженной на постоянную Планка* $\hbar$ *. При этом обе эти величины при действии группы остаются неизменными.*

Посмотрим теперь, насколько сильно могут разойтись начальный $\rangle$ и конечный $|\,\delta s\,\rangle$ векторы. Неравенство треугольника обычным образом обобщается на произвольные криволинейные пути [12]. Поэтому угол между начальным и конечным векторами не может быть больше, чем приращение параметра, умноженное на квантовую угловую скорость:

$$\angle\left(\,|\,\delta s\,\rangle\,,\,\rangle\,\right) \,\leqslant\, |\delta s|\,\tfrac{1}{\hbar}\,\Delta_{\rangle}A\;. \tag{9}$$

Для физических приложений представляется удобным ввести некоторую качественную границу, при которой два вектора состояния могут считаться различающимися *существенно.* Поэтому мы будем говорить, что два вектора различаются *существенно*, если угол между ними больше либо равен 1 .

Переформулируем теперь неравенство (9) в форме следующей теоремы.

Т е о р е м а. (принцип определённости) *Чтобы под действием сильно непрерывной однопараметрической унитарной группы* $U(\delta s) = e^{-\,i\,\delta s\,A/\hbar}$ *начальный вектор состояния* $\rangle$ *изменился существенно, необходимо, чтобы выполнялось неравенство:*

$$|\delta s|\,\Delta_{\rangle}A \geqslant \hbar\;. \tag{10}$$

Эта теорема легко обобщается и на случай, когда группа является многопараметрической. Действительно, если δs и A имеют матричные индексы, по которым предполагается суммирование, то неравенство (10) для этого случая можно записать немного иначе:

$$\Delta_{\rangle}(\,\delta s_j\,A_j\,) \geqslant \hbar\;.$$

При этом величины δs_j являются так называемыми логарифмическими координатами данной группы.

Полезно отметить также следующее. При доказательстве теоремы мы предполагали, что квантовая скорость хорошо определена, то есть что производная вектора по параметру существует и принадлежит гильбертову пространству. Однако если генератор является неограниченным оператором, для некоторых векторов состояния это может оказаться и не так. Тем не менее, утверждение теоремы оказывается верным и в этом случае, поскольку в этом случае величина $\Delta_{\rangle}A$ оказывается бесконечной. Поэтому при ненулевом значении параметра в левой части неравенства оказывается бесконечность (которая, конечно, больше постоянной Планка).

Таким образом, содержание теоремы оказывается верным для *любого* вектора состояния $\rangle$ и *любого* (самосопряжённого) генератора A .

Подгруппы группы Пуанкаре

Приведённая в конце предыдущего раздела теорема и является самым общим математическим выражением принципа определённости. При этом, в зависимости от конкретной задачи, рассматриваемая унитарная группа может являться представлением той или иной физической группы симметрии. Наиболее важный пример при этом представляет собой группа Пуанкаре, общее соотношение определённости для которой (5) уже приводилось выше. Эта группа имеет некоторые физически важные подгруппы, которые настолько практически важны, что мы обсудим их здесь более подробно.

Пространственные трансляции. Генераторами трёхпараметрической группы пространственных трансляций, как известно, являются компоненты векторного оператора импульса P_1, P_2 и P_3. Соотношение определённости, соответственно, записывается как

$$\Delta_{\rangle}(\,\delta x_1\,P_1\,+\,\delta x_2\,P_2\,+\,\delta x_3\,P_3\,)\geqslant\hbar\ . \tag{11}$$

Здесь числа δx_1, δx_2 и δx_3 составляют компоненты вектора, который задаёт пространственный сдвиг.

Если положить теперь $\delta x_2=\delta x_3=0$, а также опустить для краткости индекс, то неравенство (11) можно записать в виде:

$$|\delta x|\,\Delta_{\rangle}P\geqslant\hbar\ .$$

Допустим теперь, что у рассматриваемой квантовой системы нам удалось найти некоторую наблюдаемую X, которую можно в том или ином смысле считать её „оператором координаты“. Это предположение принимается как само собой разумеющееся в нерелятивистской квантовой механике. В релятивистской же квантовой теории никакого естественного понятия координаты нет.[8] Можно, например, формально составить из генераторов группы Пуанкаре векторный оператор, компонентам которого в классической механике соответствуют координаты центра масс. При этом следует иметь в виду, что он будет обладать довольно необычными свойствами. Например, его компоненты не будут коммутировать друг с другом.

Будем полагать, что X — самосопряжённый оператор с непрерывным спектром, $X=X^*$. Обозначим $\Omega_{(a,b)}$ его спектральный проектор[9] для произвольного вещественного интервала (a,b).

Предположим также, что X, будучи координатой, ведёт себя обычным образом под действием трансляций, а именно, что для любых a, b и δx имеет место равенство:

$$e^{+\,i\,\delta x\,P/\hbar}\,\Omega_{(a+\delta x,b+\delta x)}\,e^{-\,i\,\delta x\,P/\hbar}\;=\;\Omega_{(a,b)}\ ,$$

то есть P является „генератором спектральных сдвигов“ для X.

Пусть теперь система находится в состоянии $\rangle$, $\langle\,|\,\rangle=1$.

Величина $\langle\,\Omega_{(a,b)}\,\rangle$, очевидно, определяет вероятность найти систему внутри интервала (a,b). Определим такие l и r, что

$$\langle\,\Omega_{(-\infty,l)}\,\rangle\;=\;\langle\,\Omega_{(r,+\infty)}\,\rangle\;=\;\tfrac{1-\sin 1}{2}\;\approx\;0,07926\ldots$$

Легко видеть, что l и r существуют[10]. При этом величину $\delta_{\rangle}X=r-l$ вполне естественно можно назвать „неопределённостью“ координаты X.

Т е о р е м а. (принцип неопределённости) *Имеет место неравенство:*

$$\delta_{\rangle}X\,\Delta_{\rangle}P\geqslant\hbar\ . \tag{12}$$

Для доказательства этой теоремы воспользуемся (двукратно) неравенством треугольника для квантового угла:

$$\angle\big(\,\rangle\;,\;e^{-\,i\,\delta_{\rangle}X\,P/\hbar}\,\rangle\,\big)\;\geqslant\;\angle\big(\,\Omega_{(-\infty,r)}\,\rangle\;,\;\Omega_{(r,+\infty)}\,e^{-\,i\,\delta_{\rangle}X\,P/\hbar}\,\rangle\,\big)-$$

[8]Это касается в том числе и дираковского электрона. Суперпозиция положительно- и отрицательно-частотного решений уравнения Дирака не имеет никакого физического смысла, а потому наблюдаемой, описываемой „оператором умножения на переменную x“ не существует.

[9]Грубо говоря, спектральный проектор — это оператор, зануляющий волновую функцию в X-представлении вне данного интервала.

[10]Но, вообще говоря, не единственны. Чтобы устранить эту многозначность, удобно выбирать l максимальным из возможных, а r — минимальным. Тогда расстояние $r-l$ будет минимальным.

$$- \angle \big(\,\rangle\, ,\ \Omega_{(-\infty,r)}\,\rangle\, \big) - \angle \big(\,e^{-i\,\delta_\rangle X\,P/\hbar}\,\rangle\, ,\ \Omega_{(r,+\infty)}\, e^{-i\,\delta_\rangle X\,P/\hbar}\,\rangle\, \big) =$$

$$= \tfrac{\pi}{2} - \arcsin\sqrt{\tfrac{1-\sin 1}{2}} - \arcsin\sqrt{\tfrac{1-\sin 1}{2}} = \tfrac{\pi}{2} - \left(\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{1}{2}\right) - \left(\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{1}{2}\right) = 1\ .$$

Но это означает, что под действием $e^{-i\,\delta_\rangle X\,P/\hbar}$ вектор $\rangle$ меняется существенно.

Применяя принцип *определённости*, непосредственно получаем (12). ■

Таким образом, принцип определённости позволяет получить альтернативное неравенство (12), выражающее принцип неопределённости. Это неравенство не эквивалентно неравенству Кеннарда (2).

С формально-математической точки зрения, ни одно из неравенств (2) и (12) не является сильнее другого.

Однако нетрудно видеть, что отношение величин $\Delta_\rangle X$ и $\delta_\rangle X$ всегда подчинено неравенству:

$$\frac{2\,\Delta_\rangle X}{\delta_\rangle X} \geqslant \sqrt{1-\sin 1} \approx 0{,}398\ldots$$

Следовательно, если ослабить неравенство Кеннарда (2) дополнительным множителем $0{,}398$ (что обычно непринципиально для качественных оценок), то оно становится слабее (12).

С другой стороны, отношение $\Delta_\rangle X / \delta_\rangle X$ может быть сколь угодно большим, и даже бесконечно большим, если волновой пакет плохо локализован. В такой ситуации неравенство Кеннарда (2), в отличие от неравенства (12), вообще не даёт никакой оценки для неопределённости импульса.

Таким образом, неравенство (12) является более содержательным, чем (2), для качественных оценок.

Пространственные вращения. Генераторами трёхпараметрической группы пространственных вращений являются компоненты векторного оператора момента импульса J_1 , J_2 и J_3 . Соотношение определённости, соответственно, записывается как

$$\Delta_\rangle(\,\delta\varphi_1\,J_1 + \delta\varphi_2\,J_2 + \delta\varphi_3\,J_3\,) \geqslant \hbar\ .$$

Логарифмические координаты имеют здесь простую геометрическую интерпретацию: поворот, описываемый координатами $\delta\varphi_1$, $\delta\varphi_2$ и $\delta\varphi_3$ можно выполнить путём поворота вокруг вектора с этими координатами на угол, равный длине этого вектора.

Полагая $\delta\varphi_2 = \delta\varphi_3 = 0$ и опуская индекс, имеем:

$$|\delta\varphi|\,\Delta_\rangle J \geqslant \hbar\ .$$

Попробуем теперь получить соотношение неопределённостей по той же схеме, что и в случае группы пространственных трансляций.

Прежде всего необходимо заметить, что соотношения *неопределённости* в форме „произведение неопределённости угла на неопределённость момента импульса больше либо равно постоянной Планка“ предложить заведомо невозможно, поскольку в состоянии, когда неопределённость момента импульса обращается в ноль (собственное состояние), „неопределённость угла“, как бы она ни определялась, не должна превосходить 2π .

Далее, здесь мы сталкиваемся с той трудностью, что „хороший“ самосопряжённый оператор угла ввести невозможно. Операторов угла оказывается бесконечно много (если определён хотя бы один), но как только мы фиксируем выбор одного из них каким-нибудь условием (например, чтобы его спектр лежал в интервале от 0 до 2π), он оказывается довольно сложно преобразующимся под действием вращений, и анализ формул сильно затрудняется.

Поэтому мы не будем здесь вообще уточнять выбор одного из бесконечного множества операторов угла, а будем подразумевать, что речь идёт сразу обо всём бесконечном классе. При этом для этого класса мы будем использовать символическое обозначение Φ .

Такой подход не порождает трудностей, поскольку при выводе соотношения неопределённости нам фактически приходится оперировать со спектральной мерой (множеством спектральных проекторов). А эта спектральная мера у всех операторов угла, в сущности, одна и та же. Просто аргументом этой меры фактически выступает не отрезок вещественной прямой, как в случае с оператором координаты, а сегмент окружности. Вещественная координата же на окружности должна пониматься с точностью до слагаемого 2π . Таким образом, спектральная мера удовлетворяет соотношению:

$$\Omega_{(a+2\pi,b+2\pi)} = \Omega_{(a,b)}\ .$$

Предположим также, что оператор J момента импульса является „генератором спектральных вращений“ для Φ :

$$e^{+\,i\,\delta\varphi\,J/\hbar}\,\Omega_{(a+\delta\varphi,b+\delta\varphi)}\,e^{-\,i\,\delta\varphi\,J/\hbar}\;=\;\Omega_{(a,b)}\;.$$

Величина $\langle\,\Omega_{(a,b)}\,\rangle$, очевидно, определяет вероятность найти систему внутри углового сегмента (a,b) . Пусть теперь имеется такой небольшой угловой сегмент (l,r) , в котором в основном сосредоточена вероятность обнаружить систему. А именно, предположим, что вероятность обнаружить систему в дополнительном сегменте равна:

$$\langle\,\Omega_{(r,l+2\pi)}\,\rangle\;=\;\tfrac{1-\sin 1}{2}\;\approx\;0,07926\ldots$$

Если r и l выбраны так, что величина $\delta_\rangle\Phi=r-l$ минимальна, то $\delta_\rangle\Phi$ можно при этом назвать „неопределённостью“ угла Φ .

Т е о р е м а. (принцип неопределённости для угла и момента импульса) *Имеет место неравенство:*

$$\delta_\rangle\Phi\;\geqslant\;\min\;(\;\hbar\,/\,\Delta_\rangle J\;;\;\pi\;)\;. \tag{13}$$

Рассмотрим случай, когда $\delta_\rangle\Phi\;\leqslant\;\pi$. При этом повёрнутый угловой сегмент (l,r) не будет перекрываться с неповёрнутым, и можно применить тот же метод оценки квантового угла, что и в случае трансляций.

Итак, воспользуемся (двукратно) неравенством треугольника для квантового угла:

$$\angle\,(\;\rangle\;,\;e^{-\,i\,\delta_\rangle\Phi\,J/\hbar}\,\rangle\;)\;\geqslant\;\angle\,(\;\Omega_{(l,r)}\,\rangle\;,\;\Omega_{(r,r+\delta_\rangle\Phi)}\,e^{-\,i\,\delta_\rangle\Phi\,J/\hbar}\,\rangle\;)\,-$$

$$-\,\angle\,(\;\rangle\;,\;\Omega_{(l,r)}\,\rangle\;)\;-\;\angle\,(\;e^{-\,i\,\delta_\rangle\Phi\,J/\hbar}\,\rangle\;,\;\Omega_{(r,r+\delta_\rangle\Phi)}\,e^{-\,i\,\delta_\rangle\Phi\,J/\hbar}\,\rangle\;)\;=$$

$$=\;\tfrac{\pi}{2}\;-\;\arcsin\sqrt{\tfrac{1-\sin 1}{2}}\;-\;\arcsin\sqrt{\tfrac{1-\sin 1}{2}}\;=\;\tfrac{\pi}{2}\;-\;\left(\tfrac{\pi}{4}-\tfrac{1}{2}\right)\;-\;\left(\tfrac{\pi}{4}-\tfrac{1}{2}\right)\;=\;1\;.$$

Но это означает, что под действием $e^{-\,i\,\delta_\rangle\Phi\,J/\hbar}$ вектор $\rangle$ меняется существенно.

Применяя принцип *определённости*, непосредственно получаем (13). ■

Как видим, принцип определённости позволяет легко получить и простое соотношение *неопределённости* для угла и момента импульса.

Следует отметить, что попытка [16] получить соотношение неопределённости для угла и момента импульса по аналогии с неравенством Кеннарда (2) приводит к довольно сложным формулам. А именно, если зафиксировать самосопряжённый оператор угла Φ условием, что его спектр является интервалом $[-\pi,\pi]$, и определить „неопределённость угла“ по формуле:

$$\Delta'_\rangle\Phi=\min_{\delta\varphi}\sqrt{\langle\,e^{+\,i\,\delta\varphi\,J/\hbar}\,\Phi^2\,e^{-\,i\,\delta\varphi\,J/\hbar}\,\rangle}\;,$$

то имеет место соотношение неопределённости:

$$\Delta'_\rangle\Phi\,\Delta_\rangle J\;\geqslant\;\frac{\hbar}{2}\,\left[\,1\;-\;\frac{3}{\pi^2}\,(\Delta'_\rangle\Phi)^2\,\right]\;. \tag{14}$$

Для исследования квазиклассического предела неравенство (13) оказывается более удобным, чем (14), т. к. позволяет накладывать более мягкие условия на локализацию волнового пакета.

Временные сдвиги. Группа Пуанкаре включает в качестве подгруппы однопараметрическую группу сдвигов во времени. Естественно ожидать, что принцип определённости имеет соответствующее математическое выражение и в этом случае. И это действительно так.

Но наше обсуждение здесь осложняется тем обстоятельством, что вся учебная литература и по классической и по квантовой механике ориентируется исключительно на решение задач динамики. При этом понятие динамического состояния обязательно относят к некоторому моменту времени. Такой подход полностью скрывает релятивистскую инвариантность. При этом понятие группы временных сдвигов становится фактически бессодержательным.

Полностью последовательными в этом плане являются инвариантный гамильтонов формализм (в случае классической механики) и релятивистское каноническое квантование (РКК) (в случае релятивистской квантовой теории поля). При этом в теорию естественным образом включаются не только временные сдвиги, но и лоренцевы бусты. Однако поскольку с таким подходом в настоящее время большинство физиков знакомы плохо, мы здесь обсудим промежуточный подход, который, в сущности, основан на представлении Гейзенберга. (Лоренцевы бусты при этом мы в этом обзоре вообще рассматривать не будем.)

Обычно под динамическим состоянием S_t в некоторый момент времени t понимают набор величин, которые можно измерить в момент времени t некоторым набором приборов, и которые задают всю последующую эволюцию системы (то есть аналогичные наборы величин в последующие моменты времени). В классической механике динамическое состояние обычно описывается либо набором координат и скоростей (лагранжев формализм), либо набором координат и импульсов (гамильтонов формализм). То есть динамическое состояние в заданный момент времени определяется точкой на некотором многообразии, называемом фазовым пространством. В квантовой механике динамическое состояние описывается вектором в гильбертовом пространстве.

Когда встаёт вопрос об описании действия группы пространственных движений на пространстве динамических состояний в некоторый момент времени, обычно рассуждают так. Пусть набор физических приборов K, измеряющих полный набор динамических переменных рассматриваемой системы, под действием некоторого движения G перешёл в K', $G : K \to K'$. И пусть для некоторого динамического состояния системы S имеется динамическое состояние S', такое что набор приборов K', измеряющий параметры состояния S', выдаёт те же результаты, что и K, измеряющий параметры состояния S. Тогда говорят, что под действием преобразования G состояние S переходит в S'. Символически это можно записать так:

$$G : K \to K' \ , \ K(S) = K'(S') \qquad \Longrightarrow \qquad G : S \to S' \ .$$

Именно таким путём вводится действие пространственных сдвигов и вращений, описанное выше.

Казалось бы, это же определение естественно можно распространить и на группу временных сдвигов:

$$G : K_{t_1} \to K_{t_2} \ , \ K_{t_1}(S_{t_1}) = K_{t_2}(S_{t_2}) \qquad \Longrightarrow \qquad G : S_{t_1} \to S_{t_2} \ .$$

Но от этого определения оказывается мало пользы, поскольку оно оказывается чисто формальным и никак не связанным с динамикой.

Приведённое выше определение динамического состояния мы немного усовершенствуем. Будем считать, что если некоторое динамическое состояние S_{t_1} в ходе эволюции переходит в S_{t_2}, то S_{t_1} и S_{t_2} описывают одно и то же динамическое состояние. То есть динамическое состояние — это просто некоторый абстрактный набор величин (не обязательно связанный с измерениями в конкретный момент времени), определяющий эволюцию системы. Когда речь идёт о квантовых системах, можно считать, что динамическое состояние просто описывается гейзенберговским вектором состояния.

При этом, если система замкнута, то её гамильтониан не зависит от времени, а также коммутирует с пространственными движениями. Поэтому описанная в предыдущих пунктах теория пространственных движений переносится и на этот случай. Кроме того, сюда присоединяется ещё и группа временных сдвигов, задаваемая семейством операторов:

$$U(\delta t) = e^{-\,i\,\delta t\,(-H)/\hbar} \ .$$

Следует обратить внимание, что генератором этой группы является гамильтониан со знаком „минус“. Оператор, описывающий действие рассматриваемой группы, является обратным к оператору, описывающему эволюцию в уравнении Шрёдингера. Можно сказать, что здесь группа действует активно, в то время как в представлении Шрёдингера она действует пассивно.

Соотношение определённости для группы временных сдвигов принимает вид:

$$|\delta t|\,\Delta_{\rangle} H \geqslant \hbar \ . \tag{15}$$

Если посмотреть на это соотношение с точки зрения представления Шрёдингера (при этом естественная связь с группой Пуанкаре утрачивается), то это соотношение как раз оказывается соотношением Мандельштама-Тамма [6] для скорости квантовой эволюции.

Таким образом, соотношение Мандельштама-Тамма для случая замкнутых систем является следствием принципа определённости.

Обсудим теперь незамкнутые системы. Соотношение Мандельштама-Тамма для скорости квантовой эволюции (получаемое в представлении Шрёдингера) естественным образом обобщается на этот случай. Обозначим гамильтониан в этом случае как H^{full}. При этом, поскольку величина $\Delta_{|t\rangle} H^{\text{full}}$, вообще говоря, зависит от времени, её нужно просто усреднить:

$$|\tau|\,\overline{\Delta_{|t\rangle} H^{\text{full}}} \geqslant \hbar \ . \tag{16}$$

Здесь τ — промежуток времени, в течение которого происходит эволюция (он не имеет смысла логарифмической координаты на какой-либо группе).

Принцип определённости в этой ситуации оказывается формально неприменим. Однако на практике, когда рассматриваются незамкнутые квантовые системы, их гамильтониан обычно представим в виде суммы двух слагаемых, собственного гамильтониана „свободной“ системы и гамильтониана взаимодействия „с внешним классическим полем“:

$$H^{\text{full}} = H + H^{\text{int}} \; .$$

При этом гамильтониан взаимодействия H^{int} обычно можно „выключать“.

В этом случае естественно связать понятие динамического состояния системы с её эволюцией при выключенном гамильтониане взаимодействия (хотя рассматриваться оно может в конкретный момент времени, без выключения гамильтониана взаимодействия). Соответственно, соотношение определённости (15) сохраняет свой прежний вид. Смысл его становится несколько более абстрактным, без какой либо прямой связи с соотношением Мандельштама-Тамма (16).

В заключение отметим, что Мандельштам и Тамм вывели своё соотношение путём прямой оценки скалярного произведения для начального и конечного векторов состояния. Теорию метрики Фубини-Штуди они при этом не использовали. Такой вывод оказывается существенно короче. Но при этом геометрическая природа результата оказывается в значительной степени скрытой. Это дополнительно усложняет интерпретацию (помимо более серьёзного недостатка — интерпретации, основанной на уравнении Шрёдингера).

Вывод соотношения Мандельштама-Тамма (в рамках уравнения Шрёдингера), основанный на метрике Фубини-Штуди, был дан позднее Ананданом и Аароновым [18]. При этом ссылки на Мандельштама и Тамма не давалось. Поэтому в западной литературе это соотношение часто ошибочно называют соотношением Анандана-Ааронова.

Благодарности

В заключение хочу поблагодарить А. Клейна, С. Лоренца, Т. А. Болохова, А. В. Осипова, Е. В. Аксёнову, А. Ю. Тощевикову, М. Гатти и А. К. Пэти за полезные дискуссии, литературные указания и помощь в добывании литературы.

Список литературы

[1] J. Hilgevoord, J. Uffink “The uncertainty principle”, in *The Stanford encyclopedia of philosophy*, ed. E. N. Zalta (2001), http://plato.stanford.edu/archives/win2001/entries/qt-uncertainty/ .

[2] W. Heisenberg “Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik and Mechanik”, Zeitschrift für Physik **43**, 172-198 (1927). (цит. по [1])

[3] E. H. Kennard “Zur Quantenmechanik einfacher Bewegungstypen”, Zeitschrift für Physik **44**, 326-352 (1927). (цит. по [1])

[4] W. Pauli “Die allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik”, in *Handbuch der Physik*, eds. K. Geiger and H. Scheel, 2nd edition, v. 245, Berlin: Springer (1933). (цит. по [1])

[5] Ю. И. Воронцов „Соотношение неопределённости энергия – время измерения“, УФН **133**(2), 351-365 (1981), http://www.ufn.ru/archive/russian/abstracts/abst5151.html .

[6] Л. И. Мандельштам, И. Е. Тамм „Соотношение неопределённости энергия-время в нерелятивистской квантовой механике“, Изв. АН СССР (сер. физ.) **9**, 122-128 (1945), в сб. [7], стр. 306-315, http://daarb.narod.ru/mandtamm/index.html , http://wave.front.ru/mandtamm/index.html .
[анг.: L. I. Mandelshtam, I. E. Tamm “The uncertainty relation between energy and time in nonrelativistic quantum mechanics”, J. Phys. (USSR) **9**, 249-254 (1945), http://daarb.narod.ru/mandtamm/index-eng.html http://wave.front.ru/mandtamm/index-eng.html .]

[7] Л. И. Мандельштам, *Полное собрание трудов*, т. 2, М.-Л. (1947).

[8] Д. А. Арбатский „О квантовании электромагнитного поля“ (2002), http://daarb.narod.ru/qed-rus.html , http://wave.front.ru/qed-rus.html , arXiv:math-ph/0402003 .
[анг.: D. A. Arbatsky “On quantization of electromagnetic field”, Font. phys. **42**, 3-45 (2002), http://daarb.narod.ru/qed-eng.html , http://wave.front.ru/qed-eng.html , arXiv:math-ph/0402003 .]

[9] Д. А. Арбатский „Что такое „релятивистское каноническое квантование“?“ (2005), http://daarb.narod.ru/wircq-rus.html , http://wave.front.ru/wircq-rus.html , arXiv:math-ph/0503029 .
[анг.: D. A. Arbatsky “What is “relativistic canonical quantization”?” (2005), http://daarb.narod.ru/wircq-eng.html , http://wave.front.ru/wircq-eng.html , arXiv:math-ph/0503029 .]

[10] T. D. Newton, E. P. Wigner “Localized states for elementary systems”, Rev. Mod. Phys. **21**(3), 400-406 (1949).
[рус.: „Локализованные состояния элементарных систем“, в сб. [11], стр. 277.]

[11] Е. Вигнер *„Этюды о симметрии“*, М.: Мир (1971). [анг.: E. P. Wigner *“Symmetries and reflections”*, Bloomington-London: Indiana univ. press (1970).]

[12] Д. А. Арбатский „Принцип определённости“ (2005), http://daarb.narod.ru/tcp-rus.html , http://wave.front.ru/tcp-rus.html , arXiv:quant-ph/0506165 .
[анг.: D. A. Arbatsky “The certainty principle”, Font. phys. **81**, 27-32 (2005), http://daarb.narod.ru/tcp-eng.html , http://wave.front.ru/tcp-eng.html , arXiv:quant-ph/0506165 .]

[13] G. Fubini “Sulle metriche definite da una forme Hermitiana”, Atti Istit. Veneto, **63**, 502-513 (1904). (цит. по [15])

[14] E. Study “Kürzeste Wege im komplexen Gebie”, Math. Ann., **60**, 321-378 (1905). (цит. по [15])

[15] А. Л. Онищик „Фубини-Штуди метрика“, *Математическая энциклопедия*, т. 5, ред. И. М. Виноградов, М.: Сов. энц. (1985).
[анг.: A. L. Onishchik “Fubini-Study metric”, in *Encyclopaedia of mathematics*, ed. M. Hazewinkel (2002), http://eom.springer.de/F/f041860.htm .]

[16] D. Judge, Nuovo Cimento **31**, 332 (1964). (цит. по [17])

[17] А. С. Давыдов *„Квантовая механика“*, изд. 2-е, М.: Наука (1973).

[18] J. Anandan, Y. Aharonov “Geometry of quantum evolution”, Phys. Rev. Lett. **65**(14), 1697-1700 (1990).

	принцип неопределённости (Гейзенберг, 1927) $\Longleftarrow$	**принцип определённости** (Арбатский, 2005)
$x,\ p$	$\Delta_\rangle X\, \Delta_\rangle P \geqslant \frac{\hbar}{2}$ (Кеннард, 1927) $\delta_\rangle X\, \Delta_\rangle P \geqslant \hbar$ (Арбатский, 2006)	$\lvert\delta x\rvert\, \Delta_\rangle P \geqslant \hbar$ (Арбатский, 2005) $\Delta_\rangle(\, \delta x_1\, P_1 + \delta x_2\, P_2 + \delta x_3\, P_3 \,) \geqslant \hbar$ (Арбатский, 2005)
$\varphi,\ J$	$\Delta_\rangle' \Phi\, \Delta_\rangle J \geqslant \dfrac{\hbar}{2} \left[1 - \dfrac{3}{\pi^2} (\Delta_\rangle' \Phi)^2 \right]$ (Джадж, 1964) $\delta_\rangle \Phi \geqslant \min\, (\, \hbar / \Delta_\rangle J \,;\, \pi \,)$ (Арбатский, 2006)	$\lvert\delta\varphi\rvert\, \Delta_\rangle J \geqslant \hbar$ (Арбатский, 2005) $\Delta_\rangle(\, \delta\varphi_1\, J_1 + \delta\varphi_2\, J_2 + \delta\varphi_3\, J_3 \,) \geqslant \hbar$ (Арбатский, 2005)
$t,\ E$		$\lvert\delta t\rvert\, \Delta_\rangle H \geqslant \hbar$ (Мандельштам, Тамм, 1945)
все	—	$\Delta_\rangle\, (\, - \delta x_\mu\, P_\mu + \frac{1}{2}\, \delta\omega_{\mu\nu}\, J_{\mu\nu} \,) \geqslant \hbar$ (Арбатский, 2005)