Принцип определённости II
Доказательство принципа неопределённости

Д. А. Арбатский*

Март 2006 г.

Аннотация

Приводится более детальный вывод принципа неопределённости Гейзенберга из принципа определённости.

Вводные замечания. После опубликования статьи [1] я получил много отзывов, в том числе с литературными указаниями. В связи с этим, считаю необходимым уточнить следующее:

1. Введённая мною метрика („квантовый угол“) известна математикам с 1904 г. как *метрика Фубини-Штуди*.

2. Правильное „соотношение неопределённости“ (на самом деле, соотношение *определённости*) для величин энергия - время было впервые предложено Мандельштамом и Таммом [2].

3. Мандельштам и Тамм изучали квантовую систему в представлении Шрёдингера, а также не использовали теоретико-групповые методы. Поэтому им не удалось понять, что их результат имеет более общий характер.

4. Я же использовал теоретико-групповые формулировки. И подразумевал, что система может, в частности, изучаться в представлении релятивистского канонического квантования [4]. Это позволило мне сформулировать принцип определённости и предложить более общие неравенства.

Некоторые мои критики отказались верить, что принцип неопределённости Гейзенберга действительно является следствием принципа определённости. Они заявили, что „этого не может быть, потому что этого не может быть никогда“.

Тем не менее, это так и есть. И здесь я даю более подробное объяснение.

Вывод принципа неопределённости. Допустим, у рассматриваемой квантовой системы нам удалось найти некоторую наблюдаемую X, которую можно в том или ином смысле считать её „оператором координаты“.

Будем полагать, что X — самосопряжённый оператор с непрерывным спектром, $X = X^*$. Обозначим $\Omega_{(a,b)}$ его спектральный проектор[1] для произвольного вещественного интервала (a, b).

Допустим также, что имеется самосопряжённый оператор P, $P = P^*$, такой, что для любых a, b и δx имеет место равенство:

$$e^{+\,i\,\delta x\,P/\hbar}\,\Omega_{(a+\delta x,b+\delta x)}\,e^{-\,i\,\delta x\,P/\hbar} \;=\; \Omega_{(a,b)}\;,$$

т. е. P является „генератором спектральных сдвигов“ для X. Как известно, таким оператором обычно является оператор импульса.

Пусть теперь система находится в состоянии $\rangle$, $\langle\,|\,\rangle = 1$.

---

*http://daarb.narod.ru/ , http://wave.front.ru/

[1] Грубо говоря, спектральный проектор — это оператор, зануляющий волновую функцию в X-представлении вне данного интервала.

Величина $\langle\,\Omega_{(a,b)}\,\rangle$, очевидно, определяет вероятность найти систему внутри интервала (a,b) . Определим такие l и r , что

$$\langle\,\Omega_{(-\infty,l)}\,\rangle \,=\, \langle\,\Omega_{(r,+\infty)}\,\rangle \,=\, \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{1-\cos^2 1} \,\approx\, 0,07926\ldots$$

Легко видеть, что l и r существуют[2]. При этом величину $\delta_{\rangle}X = r - l$ вполне естественно можно назвать „неопределённостью“ координаты X .

Т е о р е м а. *Имеет место неравенство (принцип неопределённости):*

$$\boxed{\delta_{\rangle}X\,\Delta_{\rangle}P \geqslant \hbar} \tag{1}$$

Для доказательства этой теоремы оценим вначале скалярное произведение вектора $\rangle$ и сдвинутого вектора $e^{-i\,\delta_{\rangle}X\,P/\hbar}\,\rangle$:

$$\begin{aligned}
\big|\,\langle\,|\,e^{-i\,\delta_{\rangle}X\,P/\hbar}\,\rangle\,\big| &= \big|\,\langle\,(\,\Omega_{(-\infty,r)} + \Omega_{(r,+\infty)}\,)\,e^{-i\,\delta_{\rangle}X\,P/\hbar}\,\rangle\,\big| = \\
&= \big|\,\langle\,\Omega_{(-\infty,r)}\,e^{-i\,\delta_{\rangle}X\,P/\hbar}\,\rangle \,+\, \langle\,\Omega_{(r,+\infty)}\,e^{-i\,\delta_{\rangle}X\,P/\hbar}\,\rangle\,\big| \leqslant \\
&\leqslant \big|\,\langle\,\Omega_{(-\infty,r)}\,e^{-i\,\delta_{\rangle}X\,P/\hbar}\,\rangle\,\big| \,+\, \big|\,\langle\,\Omega_{(r,+\infty)}\,e^{-i\,\delta_{\rangle}X\,P/\hbar}\,\rangle\,\big| = \\
&= \big|\,\langle\,(\Omega_{(-\infty,r)})^2\,e^{-i\,\delta_{\rangle}X\,P/\hbar}\,\rangle\,\big| \,+\, \big|\,\langle\,(\Omega_{(r,+\infty)})^2\,e^{-i\,\delta_{\rangle}X\,P/\hbar}\,\rangle\,\big| = \\
&= \big|\,\langle\,\Omega_{(-\infty,r)}\,e^{-i\,\delta_{\rangle}X\,P/\hbar}\,\Omega_{(-\infty,l)}\,\rangle\,\big| \,+\, \big|\,\langle\,\Omega_{(r,+\infty)}\,e^{-i\,\delta_{\rangle}X\,P/\hbar}\,\Omega_{(l,+\infty)}\,\rangle\,\big| \leqslant \\
&\leqslant \langle\,\Omega_{(-\infty,r)}\,\rangle^{1/2}\,\langle\,\Omega_{(-\infty,l)}\,\rangle^{1/2} \,+\, \langle\,\Omega_{(r,+\infty)}\,\rangle^{1/2}\,\langle\,\Omega_{(l,+\infty)}\,\rangle^{1/2} = \\
&= \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{1-\cos^2 1}}\cdot\sqrt{\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{1-\cos^2 1}} \,+ \\
&\qquad + \sqrt{\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{1-\cos^2 1}}\cdot\sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{1-\cos^2 1}} \,=\, \cos 1\ .
\end{aligned}$$

Здесь при переходе с пятой на шестую строку мы оценили оба слагаемых с помощью неравенства Коши-Буняковского-Шварца.

Таким образом, для квантового угла между исходным и сдвинутым векторами имеем оценку:

$$\angle\big(\,\rangle\,,\; e^{-i\,\delta_{\rangle}X\,P/\hbar}\,\rangle\,\big) \;\geqslant\; 1\ .$$

Но это означает, что под действием $e^{-i\,\delta_{\rangle}X\,P/\hbar}$ вектор $\rangle$ меняется *существенно* [1].

Применяя принцип *определённости* [1], непосредственно получаем (1). ■

Обсуждение. Исторически сложилось так [5], что сейчас во всех учебниках принцип неопределённости Гейзенберга иллюстрируется с помощью неравенства Кеннарда,

$$\Delta_{\rangle}X\,\Delta_{\rangle}P \;\geqslant\; \frac{\hbar}{2}\ \ ,$$

которое не является тождественным (1). Его несомненное достоинство состоит в том, что его доказательство легче понять человеку, который впервые начинает изучать квантовую механику. Однако я всё же полагаю, что (1) является более фундаментальным.

Благодарности. В заключение хочу поблагодарить Т. А. Болохова, А. В. Осипова, Е. В. Аксёнову, А. Ю. Тощевикову, А. Клейна, М. Гатти, А. К. Пэти и П. Эндерса за полезные дискуссии, литературные указания и помощь в добывании литературы.

[2] Но, вообще говоря, не единственны. Чтобы устранить эту многозначность, удобно выбирать l максимальным из возможных, а r — минимальным. Тогда расстояние $r-l$ будет минимальным.

Список литературы

[1] Д. А. Арбатский „Принцип определённости“ (2005),
http://daarb.narod.ru/tcp-rus.html , http://wave.front.ru/tcp-rus.html , arXiv:quant-ph/0506165 .
[анг.: D. A. Arbatsky “The certainty principle” (2005),
http://daarb.narod.ru/tcp-eng.html , http://wave.front.ru/tcp-eng.html , arXiv:quant-ph/0506165 .]

[2] Л. И. Мандельштам, И. Е. Тамм „Соотношение неопределённости энергия-время в нерелятивистской квантовой механике“, Изв. Акад. Наук СССР (сер. физ.) **9**, 122-128 (1945), в сб. [3], стр. 306-315.
[анг.: L. I. Mandelshtam, I. E. Tamm “The uncertainty relation between energy and time in nonrelativistic quantum mechanics”, J. Phys. (USSR) **9**, 249-254 (1945).]

[3] Л. И. Мандельштам, *Полное собрание трудов*, т. 2, М.-Л. (1947).

[4] Д. А. Арбатский „Что такое „релятивистское каноническое квантование“?“ (2005),
http://daarb.narod.ru/wircq-rus.html , http://wave.front.ru/wircq-rus.html , arXiv:math-ph/0503029 .
[анг.: D. A. Arbatsky “What is “relativistic canonical quantization”?” (2005),
http://daarb.narod.ru/wircq-eng.html , http://wave.front.ru/wircq-eng.html , arXiv:math-ph/0503029 .]

[5] J. Hilgevoord, J. Uffink “The uncertainty principle”, in *The Stanford encyclopedia of philosophy*, ed. E. N. Zalta (2001), http://plato.stanford.edu/archives/win2001/entries/qt-uncertainty/ .