О квантовании электромагнитного поля.
I. Классическая электродинамика.

Д. А. Арбатский*

Март 2002 г.

Аннотация

Развивается методика исследования классических полей на основе инвариантного гамильтонова формализма. Электромагнитное поле, наряду со скалярным, выступает как частный пример применения общего метода. Вычисляются скобки Пуассона для этих полей. Разъясняется необходимость введения „нефизических“ степеней свободы для электромагнитного поля.

1. Вводные замечания. Данная статья является первой в серии из шести статей, объединённых общим заголовком. Ссылки на эти статьи будут здесь даваться римскими цифрами: [I], ..., [VI].

Одним из поводов для настоящего исследования явилась попытка ответить на вопрос о том, как устроено пространство состояний квантованного электромагнитного поля с точки зрения функционального анализа.

1. При изложении схемы квантования Гупты-Блейлера современные учебники молчаливо предполагают, что вопрос о топологии квантового пространства состояний у электромагнитного поля решается в полной аналогии с полем скалярным. При этом электромагнитное поле квантуется либо в обычном гильбертовом пространстве (такая конструкция не обладает даже неявной релятивистской инвариантностью [VI]), либо в „гильбертовом пространстве с индефинитной метрикой“ (при таком подходе вопрос о топологии до сих пор вообще не был исследован на должном уровне строгости; при этом фактически оказывается, что пространство состояний вообще не определялось конструктивно).

   В любом случае, основываясь на различных аналогиях, обычно считают, что пространство состояний, с *топологической* точки зрения, *должно* быть гильбертовым. Из нашего исследования станет ясно, что такая точка зрения ошибочна. Причём этот вывод является достаточно общим: он заставляет по-новому взглянуть и на квантование полей, с квантованием которых до сих пор всё как-будто было в порядке (например, скалярного).

2. Корень проблемы, как будет видно, лежит не в функциональном анализе, а в алгебре. Процесс квантования в пространстве Фока до сих пор не был описан удовлетворительно с *алгебраической* точки зрения. Дело в том, что, следуя за Фоком [1], для построения квантованного поля в качестве отправной алгебраической структуры берут одночастичное квантовое пространство. Но такая алгебраическая структура слишком бедна: не существует алгебраического процесса, позволяющего сконструировать на её основе поле квантовое (именно, опираясь только на структуру одночастичного подпространства, невозможно ввести локальные операторы поля (см., например, [3], гл. 5)).

   Как будет видно из настоящего исследования, подходящей алгебраической структурой для построения квантованного поля является классическое поле, описанное на языке инвариантного гамильтонова формализма.

3. После решения алгебраических вопросов (т. е. построения удовлетворительной схемы квантования) решение вопроса о топологии оказывается в значительной степени чисто технической проблемой. При этом важным оказывается осознание того факта, что при построении пространства состояний электромагнитного поля в любом случае приходится от гильбертова пространства отказаться. В статье [VI] для решения этой проблемы вводятся новые классы функциональных пространств.

*http://daarb.narod.ru/ , http://wave.front.ru/

4. Вопрос о релятивистской инвариантности предложенной здесь конструкции квантованного поля не встаёт. Дело в том, что эта конструкция не просто релятивистски-инвариантна: требование релятивистской инвариантности составляет основу самой конструкции.

   Если использовать приведённую здесь конструкцию для квантования гармонического осциллятора, то требование инвариантности квантования по отношению к некоторой группе в известном смысле заменяет требование о том, чтобы квантовое пространство состояний было гильбертовым. При этом квантований оказывается два: одно в гильбертовом пространстве и одно — в пространстве с индефинитным скалярным произведением.

   Таким образом, мы даже не делаем попытки как-либо обобщать теорему Стоуна-фон Неймана на случай релятивистских полей: вместо этого предложена принципиально иная концепция квантования, которая даже в случае квантования гармонического осциллятора работает *иначе*.

5. Поскольку наш подход к квантованию последовательно ориентирован на явное отслеживание симметрии (в случае релятивистских полей — по отношению к группе Пуанкаре), удаётся ясно проследить, каким образом действие группы симметрии переносится с классического пространства состояний на квантовое. Не будет преувеличением сказать, что именно в настоящих статьях впервые (на строгом уровне) раскрывается, каким образом у квантовой системы оказываются интегралы движения того же типа, что и у соответствующей классической системы (и связанные с наличием группы симметрии).

6. Ещё со времён классической работы Бора и Розенфельда [4] известно, что при рассмотрении полевых операторов в некоторой фиксированной точке пространства-времени возникают проблемы. В современных книгах, претендующих на математическую строгость, принято говорить, что мы имеем в этом случае дело с „операторным распределением“.

   При использовании инвариантного гамильтонова формализма в качестве основы для построения квантовых полей можно видеть, что проблема эта может быть исследована уже в классической механике, причём с гораздо большей ясностью.

   С точки зрения формальной, можно было бы полностью разобрать этот вопрос уже в данной статье. Тем более что строгий подход к вычислению скобок Пуассона всё равно требует обсуждения топологии инвариантного фазового пространства. Тем не менее этот вопрос я предпочёл оставить до последней статьи. Дело в том, что выбор топологии для инвариантного фазового пространства может быть ясно и просто *мотивирован* только после рассмотрения релятивистских полей с точки зрения теории групп [IV] и обсуждения квантования [VI].

7. Как известно, к лагранжиану поля можно добавлять некоторую дивергенцию, не меняя при этом уравнений движения. В статье [II] показано, что при этом не меняется и инвариантное гамильтоново описание поля. Поскольку предлагаемая схема квантования целиком базируется на структуре инвариантного гамильтонова формализма, получаемое в результате квантование также к замене лагранжиана нечувствительно.

8. Поскольку основой для построения квантованных полей у нас выступает классическое поле, а не одночастичное квантовое пространство, теория Вигнера-Макки (об унитарных представлениях группы Пуанкаре) у нас не играет фундаментальной роли. Аналогом этой теории является теория симплектических представлений группы Пуанкаре (в статье [IV] я попытался описать некоторые основы).

   Теория симплектических представлений группы Пуанкаре до известной степени похожа на теорию унитарных. Однако пример электромагнитного поля как раз показывает, что полной аналогии здесь нет.

9. В своём изложении мы будем ориентироваться преимущественно на линейные вещественные бозе-поля. Требование линейности здесь принципиально: нелинейные поля мы квантовать не умеем. Что касается требований вещественности и того, чтобы поле было бозевским, то эти ограничения приняты здесь только для того, чтобы не усложнять обозначения и формулировки. „Комплексность“ поля означает просто наличие дополнительной комплексной структуры. Что касается фермиевских полей, то для их описания требуется использование грассмановых переменных (см., например, [6]). Используются ли обычные числа или грассмановы, для нашего рассмотрения не принципиально.

В данной статье даётся описание классического электромагнитного поля. Основная цель — изложить общеизвестные факты на новом языке. Впрочем, данный подход позволяет взглянуть на некоторые вопросы совершенно иначе: например, выясняется, что вопрос об энергии электростатического поля до сих пор трактовался неправильно.

2. Обозначения. В тензорных обозначениях мы будем записывать векторы пространства Минковского как a_μ , b_ν и т. п. При этом будут использоваться только *контравариантные* компоненты тензоров; индексы же, нумерующие их, будут писаться всегда *внизу*. Система координат всегда будет предполагаться ортонормированной относительно скалярного произведения $g(\cdot\,,\,\cdot)$, т. е. такой, что метрический тензор имеет стандартный вид: $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(+1,-1,-1,-1)_{\mu\nu}$. По повторяющимся тензорным индексам суммирование всегда проводится с учётом знаков. Например, скалярное произведение будет записываться как

$$a\,b = a_\mu\, b_\mu = g_{\mu\nu}\, a_\mu\, b_\nu = a_0\, b_0 - a_1\, b_1 - a_2\, b_2 - a_3\, b_3 \ .$$

Производные по пространственно-временным координатам обозначаются символом ∂_μ :

$$\partial_\mu = \Big(\ \tfrac{\partial}{\partial x_0}\ \Big|\ -\tfrac{\partial}{\partial x_1}\quad -\tfrac{\partial}{\partial x_2}\quad -\tfrac{\partial}{\partial x_3}\ \Big)_\mu \ ,$$

т. е. индекс у производной, как и все индексы, является контравариантным.

Для сокращения обозначений введён символ антисимметризации вида $^{[\mu\nu]}$. Он означает, что по ближайшим следующим за ним индексам μ и ν проводится антисимметризация. Например, тензор электромагнитного поля записывается как $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu =^{[\mu\nu]} 2\,\partial_\mu A_\nu$.

Оператор Даламбера задаётся формулой: $\partial^2 = \partial_\mu \partial_\mu$.

Преобразование Фурье имеет всюду вид:

$$\widetilde{\varphi}(k) = \int d^4\!x\, e^{+ikx}\, \varphi(x) \ , \qquad \varphi(x) = \int \frac{d^4\!k}{(2\pi)^4}\, e^{-ikx}\, \widetilde{\varphi}(k) \ . \tag{1}$$

Система единиц всюду такова, что $\hbar = c = 1$.

3. Инвариантный гамильтонов формализм. В работах [7, 8, 9] было показано, что базовым понятиям гамильтонова формализма (а именно, фазовому пространству и симплектической структуре на нём) можно придать релятивистски инвариантный смысл. Там же были получены формулы для симплектической структуры наиболее важных систем (в координатном представлении). Тем самым была заложена основа схемы, которую можно назвать инвариантным гамильтоновым формализмом. Подробное изложение имеется в оригинальных обзорах [10, 11]. Вопрос об эквивалентности этого подхода и обычной гамильтоновой механики в случае систем со связями обсуждался также в [12].

Здесь я напомню однако некоторые основные понятия. Это нужно для того, чтобы ввести наши собственные обозначения.

Пусть поле $\varphi_i(x)$ описывается лагранжианом $L(\varphi_i, \partial_\mu \varphi_i)$. Лагранжиан мы здесь будем считать зависящим только от самих полевых переменных φ_i и их производных[1], и не зависящим от точки x . Кроме того, мы будем иметь дело только с линейными полями, и лагранжиан будет считаться квадратичной функцией.

Принцип наименьшего действия приводит к уравнениям Эйлера-Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial\, \varphi_i} - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial\, (\partial_\mu \varphi_i)} = 0 \ . \tag{2}$$

Инвариантное фазовое пространство Z определяется как множество всех функций[2] φ_i , которые удовлетворяют уравнениям (2). Поскольку мы предполагаем уравнение (2) линейным, пространство Z обладает естественной линейной структурой.

Элементы пространства Z будем обозначать подчёркнутыми наборами символов, например, $\underline{c} \in Z$. Функции на этом пространстве будем записывать как $f^{\,\underline{c}}$. Например, значение функции φ , отвечающей элементу $\underline{c}$, в точке x записывается как $\varphi(x)^{\underline{c}}$.

Мы будем, как правило, отождествлять элементы касательного расслоения TZ с элементами самого Z . Если однако необходимо указать, что касательный вектор $\underline{c}$ приложен в точке $\underline{b} \in Z$, то можно его записать как $\underline{c\,[\underline{b}]}$. Элементы кокасательного расслоения T^*Z будут, аналогично, отождествляться с элементами

[1] Нам здесь достаточно будет ограничиться лагранжианами, зависящими только от производных первого порядка. В общем случае можно рассматривать и лагранжианы с высшими производными [12].

[2] Точнее, будем пока считать, что речь идёт о гладких функциях. Кроме того, будем считать, что эти функции отличны от нуля только на множестве, пересечение которого с любой пространственно-подобной плоскостью ограничено. В статье [VI] мы обсудим вопрос о естественной топологии пространства Z .

сопряжённого пространства Z^* . Дифференциалы линейных функций при этом отождествляются с самими функциями, т. е. вместо df пишем просто: f .

На инвариантном фазовом пространстве Z , так же, как и на обычном, имеется симплектическая структура ω :

$$\omega = \int\limits_{\Sigma} d\sigma_\mu \, \delta j_\mu(x) \ , \qquad \text{где} \ \ \delta j_\mu(x) = \frac{\partial L}{\partial \left(\partial_\mu \varphi_i\right)} \wedge \varphi_i \ . \tag{3}$$

Интегрирование ведётся по любой пространственно-подобной гиперповерхности Σ , не слишком плохо ведущей себя на бесконечности. 2-форма δj_μ называется симплектическим током. Поскольку симплектический ток сохраняется, результат от выбора поверхности Σ не зависит.

Произвол в выборе лагранжиана и возникающая отсюда неоднозначность симплектической структуры будут рассмотрены в статье [II]. В разумном смысле можно сказать, что неоднозначность в выборе лагранжиана не влияет на симплектическую структуру.

Симплектическая структура ω , как обычно [13], задаёт изоморфизм $I : T^*Z \to TZ$ кокасательного T^*Z и касательного TZ расслоений[3]. Он сопоставляет произвольной 1-форме $l^{\dot{-}} \in T^*Z$ касательный вектор $\underline{Il} \in TZ$ такой, что для любого касательного вектора $\underline{c} \in TZ$ выполняется равенство:

$$\omega^{\underline{c}\,;\,\underline{Il}} = l^{\underline{c}} \ . \tag{4}$$

Если форма $l^{\dot{-}}$ является дифференциалом некоторой функции $g^{\dot{-}}$, т. е. $l^{\dot{-}} = dg^{\dot{-}}$, то мы говорим, что $g^{\dot{-}}$ является генератором векторного поля $\underline{Il} = \underline{I\,dg}$.

Скобка Пуассона двух функций $f^{\dot{-}}$ и $g^{\dot{-}}$ определяется равенством:

$$\{\, f \,,\, g \,\} = df^{\,\underline{I\,dg}} \ . \tag{5}$$

Если же функции $f^{\dot{-}}$ и $g^{\dot{-}}$ линейны, то это определение можно записать просто как:

$$\{\, f \,,\, g \,\} = f^{\,\underline{Ig}} \ . \tag{6}$$

Здесь нам достаточно будет ограничиться вещественными полями, поэтому пространство Z будет вещественным линейным пространством. Однако оказывается полезным рассматривать комплексные функции на фазовом пространстве. Их дифференциалы принадлежат комплексифицированному сопряжённому пространству. По этой причине вместо пространства Z^* , мы будем всегда использовать его комплексификацию $Z^*_{\mathbb{C}}$. Кроме того, при определении скобки Пуассона комплексных функций по формуле (5) приходится рассматривать комплексные векторы $\underline{I\,dg}$. Этого можно было бы избежать, определив скобки Пуассона несколько более абстрактно[4].

4. Скалярное поле. Рассмотрим скалярное поле. Его лагранжиан таков:

$$L = \tfrac{1}{2}\, \partial_\nu\varphi \, \partial_\nu\varphi - \tfrac{m^2}{2}\, \varphi^2 \ .$$

Уравнение движения (2) принимает вид (уравнение Клейна-Фока-Гордона):

$$\left(\partial^2 + m^2\right) \varphi = 0 \ . \tag{7}$$

Симплектическая структура (3) на инвариантном фазовом пространстве Z^{scal} в координатном представлении имеет вид (указанный ещё в [7]):

$$\omega = \int\limits_{\Sigma} d\sigma_\nu \, \partial_\nu\varphi \wedge \varphi \ . \tag{8}$$

---

[3] Строго говоря, о таком изоморфизме можно говорить только после обсуждения топологии инвариантного фазового пространства. Без такого обсуждения даже понятие кокасательного расслоения не имеет ясного смысла. По причинам, объяснённым в „Вводных замечаниях“ обсуждение этого вопроса для случая релятивистских полей мы оставляем до статьи [VI].

Также следует иметь в виду, что употребляемые здесь величины типа $\varphi(x)$ при введении надлежащей топологии оказываются не принадлежащими кокасательному расслоению фазового пространства. Этот недостаток легко устраним, но до обсуждения топологии мы предпочитаем просто не обращать на него внимания.

[4] Комплексификация Z представляется нежелательной, т. к. это пространство можно рассматривать как множество *физических* состояний, существующих в природе. Пространство $Z^*_{\mathbb{C}}$ при этом можно рассматривать как множество *математических* величин, используемых для описания физических состояний.

Совершим теперь преобразование Фурье функции $\varphi(x)$ по формулам (1). Поскольку функция $\varphi(x)$ удовлетворяет уравнению (7), её фурье-образ $\widetilde{\varphi}(k)$ можно представить в виде:

$$\widetilde{\varphi}(k) = 2\pi\,\delta(k^2 - m^2)\cdot a(k)\ , \tag{9}$$

где $a(k)$ — обычная функция, заданная на массовой поверхности $k^2 = m^2$.

Преобразуя теперь симплектическую структуру (8) в фурье-представление, имеем:

$$\omega^{\underline{\cdot}\,;\,\underline{\cdot}} = \int d\mu_m \cdot i\,\varepsilon(k)\cdot a(-k)^{\underline{\cdot}}\, a(k)^{\underline{\cdot}}\ , \qquad \text{где}\ \ d\mu_m = \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\cdot 2\pi\,\delta(k^2 - m^2)\ . \tag{10}$$

Под знаком интеграла стоит обычное произведение[5]. Подразумевается, что в правой части формулы аргументы подставляются в том же порядке, в котором они следуют слева.

Чтобы теперь вычислить скобку Пуассона двух полевых величин $\{\,\widetilde{\varphi}(k)\,,\,\widetilde{\varphi}(k')\,\}$, согласно формуле (6), рассмотрим вектор $\underline{I\widetilde{\varphi}(k')}$. Из формул (4) и (10) имеем, что для любого вектора $\underline{c}$:

$$\int d\mu_m \cdot i\,\varepsilon(k)\cdot a(-k)^{\underline{c}}\, a(k)^{\underline{I\widetilde{\varphi}(k')}} = \widetilde{\varphi}(k')^{\underline{c}}\ .$$

Используя линейную независимость формы $a(k)^{\underline{\cdot}}$ при различных k , $k^2 = m^2$, а также определение этой формы (9), отсюда получаем, что вектор $\underline{I\widetilde{\varphi}(k')}$ характеризуется соотношением:

$$a(k)^{\underline{I\widetilde{\varphi}(k')}} = -\,i\,\varepsilon(k)\cdot(2\pi)^4\delta(k + k')\ .$$

Отсюда, по формуле (6), искомая скобка Пуассона равна:

$$\{\,\widetilde{\varphi}(k)\,,\,\widetilde{\varphi}(k')\,\} = -\Big[\,i\,\varepsilon(k)\cdot 2\pi\,\delta(k^2 - m^2)\,\Big]\cdot(2\pi)^4\delta(k + k')\ . \tag{11}$$

Иногда бывает полезно иметь аналогичное соотношение в координатном представлении. Чтобы его получить, нужно в формуле (11) совершить преобразование Фурье по переменным k и k' :

$$\{\,\varphi(x)\,,\,\varphi(x')\,\} = -D_m(x - x')\ .$$

Здесь функция $D_m(y)$ имеет вид:

$$D_m(y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, e^{-iky}\cdot\Big[\,i\,\varepsilon(k)\cdot 2\pi\,\delta(k^2 - m^2)\,\Big]\ . \tag{12}$$

5. „Физическое“ электромагнитное поле. Выберем лагранжиан электромагнитного поля калибровочно-инвариантным:

$$L = -\,\tfrac{1}{4}\,F_{\mu\nu}\,F_{\mu\nu} = -\,^{[\mu\nu]}\,\partial_\mu A_\nu\,\partial_\mu A_\nu\ , \qquad \text{где}\ \ F_{\mu\nu} = {}^{[\mu\nu]}\,2\,\partial_\mu A_\nu\ . \tag{13}$$

Уравнение движения (2) принимает вид (второе уравнение Максвелла):

$$\partial_\mu F_{\mu\nu} = 0\ . \tag{14}$$

Под инвариантным фазовым пространством Z^{phys} в данном случае удобно понимать множество функций $F_{\mu\nu}(x)$, удовлетворяющих уравнению (14). При этом значение векторного потенциала A_μ в данной точке x не является хорошо определённой функцией на Z^{phys} : запись вида $A_\mu(x)^{\underline{\cdot}}$ не имеет смысла, пока не указано, какая калибровка имеется в виду. По этой причине никакой однозначной формулы для скобок Пуассона от векторного потенциала написать нельзя.

Симплектическая структура (3) в данном случае имеет вид (указанный ещё в [8, 10]):

$$\omega = -\int\limits_{\Sigma} d\sigma_\mu\,F_{\mu\nu}\wedge A_\nu\ . \tag{15}$$

[5] Если ввести обозначение $d\mu_m^+ = d\mu_m\cdot\theta(k)$, то формулу (10) можно переписать и в терминах внешнего произведения форм:

$$\omega = \int d\mu_m^+\cdot i\,a^*(k)\wedge a(k)\ .$$

Здесь уместно отметить, что хотя форма ω выражена через калибровочно-неинвариантную величину A_ν , сама она, разумеется, калибровочно-инвариантна.

Выберем теперь векторный потенциал A_μ так, чтобы он удовлетворял условию Лоренца $\partial_\nu A_\nu = 0$. При этом, согласно уравнению (14), он будет удовлетворять уравнению Даламбера: $\partial^2 A_\mu = 0$. Разобьём выражение (15) на два слагаемых:

$$\omega = - \int\limits_\Sigma d\sigma_\mu \, \partial_\mu A_\nu \wedge A_\nu + \int\limits_\Sigma d\sigma_\mu \, \partial_\nu A_\mu \wedge A_\nu \ .$$

Второй из этих двух интегралов равен нулю. В этом можно убедиться следующим образом. Во-первых, из условия Лоренца и антисимметрии внешнего умножения следует, что подынтегральное выражение является сохраняющимся током: $\partial_\mu(\partial_\nu A_\mu \wedge A_\nu) = 0$. Поэтому во втором интеграле, независимо от первого, можно перейти от интегрирования по поверхности Σ к интегрированию по поверхности $t = 0$. Получаем интеграл:

$$\int d^3\boldsymbol{x} \, \partial_\nu A_0 \wedge A_\nu \ .$$

Вследствие условия Лоренца его можно переписать так:

$$\int d^3\boldsymbol{x} \, \partial_\nu (A_0 \wedge A_\nu) \ .$$

Но $A_0 \wedge A_0 = 0$. Поэтому суммирование по индексу ν можно фактически проводить лишь от 1 до 3 . Получаем:

$$\int d^3\boldsymbol{x} \, \partial_n (A_0 \wedge A_n) \ .$$

Это интеграл от дивергенции трёхмерного вектора $A_0 \wedge A_n$. По теореме Остроградского-Гаусса, он равен потоку этого вектора через удалённую двумерную замкнутую поверхность. Этот поток равен нулю, поскольку векторный потенциал предполагается выбранным так, чтобы он там обращался в нуль.

Таким образом, при выполнении условия Лоренца $\partial_\nu A_\nu = 0$, симплектическая структура (15) может быть записана в виде:

$$\omega = - \int\limits_\Sigma d\sigma_\mu \, \partial_\mu A_\nu \wedge A_\nu \ . \tag{16}$$

Произведём теперь над функциями $A_\mu(x)$ и $F_{\mu\nu}(x)$ преобразование Фурье (1). Точно так же, как в случае скалярного поля, представим эти фурье-образы в виде:

$$\widetilde{A}_\mu(k) = 2\pi \, \delta(k^2) \cdot a_\mu(k) \ , \qquad \widetilde{F}_{\mu\nu}(k) = 2\pi \, \delta(k^2) \cdot f_{\mu\nu}(k) \ .$$

Здесь $a_\mu(k)$ и $f_{\mu\nu}(k)$ — обычные функции, заданные на световом конусе $k^2 = 0$.

Симплектическая структура (16) в фурье-представлении принимает вид[6]:

$$\omega^{\dot{-}\,;\,\dot{-}} = - \int d\mu_m \cdot i \, \varepsilon(k) \cdot a_\nu(-k)^{\dot{-}} \, a_\nu(k)^{\dot{-}} \ . \tag{17}$$

Формулы (16) и (17) внешне очень похожи на соответствующие формулы (8) и (10) для скалярного поля. Точнее, они выглядят так же, как формулы для симплектической структуры четырёх скалярных полей. Следует однако иметь в виду, что инвариантное фазовое пространство Z^{phys} , введённое в этом пункте, не является прямой суммой инвариантных фазовых пространств четырёх скалярных полей. По этой причине, как уже отмечалось, скобку Пуассона для векторного потенциала вычислить нельзя.

Рассмотрим теперь, как устроено пространство Z^{phys} в фурье-представлении. Это пространство можно рассматривать как множество функций $a_\mu(k)$ на световом конусе $k^2 = 0$, удовлетворяющих условию Лоренца $- i \, k_\mu \, a_\mu(k) = 0$ и рассматриваемых с точностью до калибровочного преобразования:

$$a_\mu(k) \ \sim \ a_\mu(k) - i \, k_\mu \, \lambda(k) \ .$$

Отсюда, из формулы (17), очевидна невырожденность симплектической структуры на пространстве Z^{phys} .

Теперь ясно, что хотя и нельзя вычислить скобки Пуассона для компонент векторного потенциала, можно вычислить скобки $\{ \widetilde{F}_{\mu\rho}(k) \, , \widetilde{F}_{\nu\sigma}(k') \}$ и $\{ F_{\mu\rho}(x) \, , F_{\nu\sigma}(x') \}$. Эту задачу мы однако отложим до пункта 11.

---

[6] В терминах внешнего произведения её можно записать так:

$$\omega = - \int d\mu_m^+ \, i \, a^*_\nu(k) \wedge a_\nu(k) \ .$$

6. Добавка Гейзенберга-Паули. При обсуждении квантовой теории электромагнитного поля со времён работы Гейзенберга и Паули [14] лагранжиан (13) принято видоизменять, добавляя к нему дополнительный член $\frac{\varepsilon}{2}\,(\partial_\mu A_\mu)^2$. Для такого шага в современных учебниках даётся множество различных „объяснений“. В основном они делятся на два класса.

К первому классу относятся „объяснения“, апеллирующие к формальным трудностям построения гамильтонова формализма и отслеживания релятивистской инвариантности. Как было показано в пункте 5, если тут и имелись какие-то трудности, то с построением инвариантного гамильтонова формализма они исчезают.

Ко второму классу относятся „объяснения“, так или иначе апеллирующие к квантовой теории. Наша ближайшая задача — объяснить, что причины модификации лагранжиана присутствуют уже в теории классической.

На первый взгляд, добавка $\frac{\varepsilon}{2}\,(\partial_\mu A_\mu)^2$ приводит только к фиксации калибровки: если условие Лоренца выполнялось в прошлом, то оно будет выполняться и в будущем. В действительности же имеется и более глубокое следствие: при построении теории рассеяния и теории возмущений появляется возможность избавиться от такой фикции, как разделение поля на „собственное“ поле частиц и на „излучение“.

Действительно, на практике оказывается невозможным решить динамическую задачу точно. Поэтому вначале вычисляется какое-либо „первое приближение“, а к нему уже далее вычисляются „радиационные поправки“. Чтобы учесть радиационную отдачу, приходится тем или иным способом делить поле на „собственное“ и „радиационное“. Сделать это вполне корректно однако невозможно даже в простейших случаях. Это не удивительно, поскольку в самом лагранжевом формализме никакого намёка на такое разделение не содержится.

Можно однако подходить к задачам рассеяния иначе. Рассмотрим для примера рассеяние двух частиц, взаимодействующих друг с другом посредством электромагнитного поля. Будем исходить из какой-нибудь наивной механической аналогии: скажем, двух тяжёлых шариков, скользящих по гладкой упругой мембране. Электромагнитному полю при этом соответствует деформированная мембрана.

Если не делить поле на собственное и радиационное, приходится считать, что всё поле частицами „создаётся“. Чтобы это как-то формализовать, нужно ввести процедуру включения и выключения взаимодействия.

Процесс рассеяния частиц и электромагнитного поля будет при этом описываться так:

1. В далёком прошлом частицы являются свободными и с полем не взаимодействуют. Присутствует также свободное поле, находящееся далеко от частиц.
2. Затем, пока частицы ещё далеко друг от друга, взаимодействие с электромагнитным полем адиабатически включается. Частицы при этом облачаются в собственное поле.
3. После того, как взаимодействие полностью включено, частицы (и поле) подлетают друг к другу близко, взаимодействуют и снова разлетаются.
4. Когда они достаточно далеко разлетятся, взаимодействие адиабатически выключается.
5. После этого остаются голые частицы, в окрестности которых никакого поля нет, и свободное поле, с частицами не связанное.

У шариков, скользящих по упругой мембране, включение и выключение взаимодействия осуществляется очевидным образом: нужно включить и выключить гравитационное поле. В случае же электромагнитного поля так просто поступить нельзя. Рассмотрим, например, взаимодействие электромагнитного поля $A_\mu(x)$ с заданным током $J_\mu(x)$. Лагранжиан в этом случае имеет вид:

$$L = -\,\tfrac{1}{4}\,F_{\mu\nu}\,F_{\mu\nu} - \alpha\,J_\mu\,A_\mu \ . \qquad (18)$$

Здесь $\alpha(x)$ — функция, включающая и выключающая взаимодействие. В дальнейшем, чтобы формулы записывались короче, мы будем использовать обозначение:

$$J^\alpha_\mu(x) = \alpha(x)\,J_\mu(x) \ .$$

Из лагранжиана (18) вытекает уравнение движения:

$$\partial_\mu F_{\mu\nu} = J^\alpha_\nu \ . \qquad (19)$$

Применяя теперь к обеим частям операцию ∂_ν , убеждаемся, что при $\partial_\nu J^\alpha_\nu \neq 0$ уравнение (19) решений не имеет. Таким образом, взаимодействие включить и выключить невозможно.

Если же к лагранжиану добавить член $\frac{\varepsilon}{2}\,(\partial_\mu A_\mu)^2$, то есть перейти к лагранжиану

$$L = -\,\tfrac{1}{4}\,F_{\mu\nu}\,F_{\mu\nu} + \tfrac{\varepsilon}{2}\,(\partial_\mu A_\mu)^2 - J^\alpha_\mu\,A_\mu \ ,$$

то уравнение движения принимает вид:

$$\partial_\mu F_{\mu\nu} - \varepsilon\,\partial_\nu\partial_\mu A_\mu = J^\alpha_\nu \ , \tag{20}$$

и решение $A_\mu(x)$ легко отыскивается для любой функции $\alpha(x)$.

Далее мы будем всюду полагать $\varepsilon = -1$. При этом уравнение (20) принимает особенно простой вид:

$$\partial^2 A_\nu = J^\alpha_\nu \ . \tag{21}$$

Его решение — это потенциал Лиенара-Вихерта. По этой причине указанную „калибровку“ следовало бы назвать калибровкой Лиенара-Вихерта. В квантовой электродинамике она однако называется калибровкой Фейнмана.

Если от обеих частей уравнения (21) взять четырёхмерную дивергенцию, получим уравнение:

$$\partial^2(\partial_\nu A_\nu) = \partial_\nu J^\alpha_\nu \ .$$

Отсюда нетрудно показать, что если взаимодействие включается адиабатически, и условие Лоренца $\partial_\nu A_\nu = 0$ выполнялось в далёком прошлом, то оно останется ненарушенным всюду.

Отсюда также следует, что дополнительный член $\frac{1}{2}\,(\partial_\mu A_\mu)^2$ в лагранжиане будет вносить нулевой вклад в вариацию действия. Поэтому в той области, где взаимодействие полностью включено, система из частиц и поля будет удовлетворять тем же уравнениям, что и система без добавки в лагранжиане.

Таким образом, введение в лагранжиан дополнительного члена не меняет в существенном картину рассеяния. Но при этом отпадает необходимость выделять каким-либо способом „собственное“ поле частиц, и появляется возможность для построения локальной теории возмущений.

Сейчас представляется затруднительным сказать, насколько далеко можно продвинуться в построении теории возмущений для классической электродинамики. Ясно только, что без введения дополнительного члена в лагранжиан ситуация была бы совершенно безнадёжной.

7. „Нефизическое“ электромагнитное поле. Рассмотрим теперь снова свободное электромагнитное поле, но в его лагранжиан уже сразу включим добавку $-\,\frac{1}{2}\,(\partial_\mu A_\mu)^2$. Лагранжиан тогда можно переписать в следующем виде:

$$L = -\,\tfrac{1}{4}\,F_{\mu\nu}\,F_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\,(\partial_\mu A_\mu)^2 = -\,\tfrac{1}{2}\,\partial_\mu A_\nu\,\partial_\mu A_\nu + \tfrac{1}{2}\,\partial_\mu(A_\nu\,\partial_\nu A_\mu - A_\mu\,\partial_\nu A_\nu) \ .$$

Как будет показано в статье [II], член, являющийся полной дивергенцией, можно отбросить. После этого лагранжиан принимает замечательно простой вид:

$$L = -\,\tfrac{1}{2}\,\partial_\mu A_\nu\,\partial_\mu A_\nu \ ,$$

т. е. он по сути является лагранжианом четырёх скалярных полей[7] с $m = 0$, рассмотренных в пункте 4. Уравнение движения имеет вид:

$$\partial^2 A_\mu = 0 \ .$$

Инвариантное фазовое пространство теперь является прямой суммой четырёх фазовых пространств скалярных полей. Обозначим его как Z^4 . Симплектическая структура в координатном и фурье-представлениях даётся формулами:

$$\omega = -\int\limits_\Sigma d\sigma_\mu\,\partial_\mu A_\nu \wedge A_\nu \ . \tag{22}$$

$$\omega^{\div;\div} = -\int d\mu_m \cdot i\,\varepsilon(k)\cdot a_\nu(-k)^{\div}\,a_\nu(k)^{\div} \ . \tag{23}$$

[7] Член, отвечающий полю с индексом $\nu = 0$, входит с отрицательным знаком.

Формулы (22) и (23) выглядят точно так же, как соответствующие формулы из пункта 5. Однако разница в содержании этих формул существенна: теперь мы можем вычислить скобку Пуассона для векторного потенциала. В фурье-представлении она имеет вид:

$$\{ \widetilde{A}_\mu(k) \, , \, \widetilde{A}_\nu(k') \} = g_{\mu\nu} \cdot \Big[i\,\varepsilon(k) \cdot 2\pi \, \delta(k^2) \Big] \cdot (2\pi)^4 \delta(k+k') \; . \tag{24}$$

В координатном представлении:

$$\{ A_\mu(x) \, , \, A_\nu(x') \} = g_{\mu\nu} \, D_0(x-x') \; . \tag{25}$$

Здесь $D_0(y)$ — функция (12) при $m=0$. В этом случае её можно записать просто как:

$$D_0(y) = \frac{1}{2\pi} \, \varepsilon(y) \, \delta(y^2) \; .$$

Подействуем теперь на обе части формулы (24) символом ${}^{[\rho\mu]} \, 2 \, (-\, i \, k_\rho) \, {}^{[\sigma\nu]} \, 2 \, (-\, i \, k'_\sigma)$. Получаем формулу для скобки Пуассона тензора электромагнитного поля в фурье-представлении:

$$\{ \widetilde{F}_{\mu\rho}(k) \, , \, \widetilde{F}_{\nu\sigma}(k') \} = {}^{[\mu\rho]} \, {}^{[\nu\sigma]} \, 4 \, g_{\mu\nu} \, k_\rho \, k_\sigma \cdot \Big[i\,\varepsilon(k) \cdot 2\pi \, \delta(k^2) \Big] \cdot (2\pi)^4 \delta(k+k') \; . \tag{26}$$

В координатном представлении это соотношение переписывается так:

$$\{ F_{\mu\rho}(x) \, , \, F_{\nu\sigma}(x') \} = - \, {}^{[\mu\rho]} \, {}^{[\nu\sigma]} \, 4 \, g_{\mu\nu} \, \partial_\rho \, \partial_\sigma D_0(x-x') \; . \tag{27}$$

Здесь обе производные берутся по переменной без штриха.

Отметим сразу, что формулы (26) и (27) совпадают с формулами для скобок Пуассона „физического“ электромагнитного поля, описанного в пункте 5. Это будет доказано в пункте 11.

8. Энергия электростатического поля. В статье [III] получена формула, с помощью которой можно в рамках инвариантного гамильтонова формализма получать генераторы группы Пуанкаре. С её помощью легко получаем формулу для импульса „нефизического“ электромагнитного поля:

$$P_\nu = - \int d\mu_m^+ \cdot k_\nu \, a_\rho^*(k) \, a_\rho(k) \; . \tag{28}$$

Из этой формулы видно, что энергия „нефизического“ поля не является положительно-определённой. Более того, из этой формулы следует, что энергия, запасённая в электростатическом поле, созданном системой неподвижных зарядов, всегда *отрицательна.*

Здесь мы обсудим возникший парадокс чуть подробнее. Это нужно сделать потому, что он обычно неправильно трактовался в рамках *квантовой* теории (см., например, [16, 17, 18, 19]).

Проблема отрицательности энергии „временны́х“ фотонов в квантовой электродинамике была замечена давно. Считалось, что квантование в пространстве с индефинитным скалярным произведением позволяет переменить знак этой энергии. И это рассматривалось как один из аргументов для введения индефинитного скалярного произведения. Так казалось потому, что при индефинитном скалярном произведении в квантовом случае не вполне ясно, что следует называть энергией состояния: среднее значение гамильтониана или его собственное число. Эта неясность, конечно, происходила от того, что, во-первых, отсутствовала ясная концепция квантования, а во-вторых, классическая теория не была сформулирована должным образом.

Из проведённого рассмотрения однако видно, что обсуждаемая энергия *должна* быть отрицательной: только такая величина представляется естественной с точки зрения релятивистской теории. А индефинитность метрики в квантовом случае здесь вообще ни при чём.

Стоит также сразу сказать, что понятие вакуума поля мы вовсе не связываем с минимальностью энергии. У классического поля вакуум — это просто нулевой вектор пространства Z . Понятие же вакуума поля квантового мы введём при описании операции квантования в статье [VI].

Как же быть с положительностью электростатической энергии, хорошо известной в обычной электростатике? Дело в том, что в это понятие традиционно вкладывают иной смысл: под ним подразумевают работу, которую совершит система, когда заряды разобьют на бесконечно малые кусочки и медленно разнесут эти кусочки далеко друг от друга. Формула же (28) даёт энергию, которая останется у поля, если мгновенно выключить его взаимодействие с зарядами.

Более подробно этот вопрос мы здесь обсуждать не будем. Заметим лишь вот что. В электростатике имеется следующая формула для энергии:

$$E^{\,\text{full}} = \tfrac{1}{2} \int \varphi \, dQ \ .$$

Множитель $\frac{1}{2}$ при этом обычно объясняют тем, что если использовать формулу для энергии во внешнем поле, то взаимная энергия любых двух элементов заряда учтётся дважды.

В рамках же той теории, которую мы здесь рассматриваем, поле всегда рассматривается как внешнее. Поэтому можно сказать, что энергия зарядов в электростатическом поле всегда даётся формулой:

$$E^{\,\text{charges}} = \int \varphi \, dQ \ .$$

К ней нужно ещё добавить энергию поля:

$$E^{\,\text{field}} = -\tfrac{1}{2} \int \varphi \, dQ \ .$$

В сумме $E^{\,\text{charges}}$ и $E^{\,\text{field}}$ как раз дают $E^{\,\text{full}}$.

9. Состояния рассеяния „нефизического“ поля. Рассмотрим теперь рассеяние „нефизического“ поля на заданном токе. Как объяснено в пункте 6, будем считать, что взаимодействие с электромагнитным полем включается и выключается адиабатически, а частицы, составляющие ток, ускоряются только в той области пространства-времени, где взаимодействие полностью включено, т. е. $\alpha(y) = 1$.

В произвольной точке пространства-времени поле будет состоять из двух компонент: из поля, которое существовало в удалённом прошлом и из поля, которое создали частицы. Это последнее добавочное поле можно вычислить по формуле Лиенара-Вихерта:

$$A^{\text{ret}}_\mu(x) = \int d^4x' \, D^{\text{c}}_0(x-x') \, J^\alpha_\mu(x') \ , \qquad \text{где} \ \ D^{\text{c}}_0(y) = \theta(y) \, D_0(y) \ . \tag{29}$$

В инвариантном гамильтоновом формализме под состоянием поля подразумевается решение соответствующего однородного уравнения. В данном случае это уравнение $\partial^2 A_\mu = 0$. Поэтому, когда мы говорим о состоянии поля в удалённом прошлом или в удалённом будущем, естественно при этом функцию $A_\mu(x)$ продолжить с помощью однородного уравнения на всё пространство. Таким образом мы приходим к определению in- и out- полей: $A_\mu(x)^{\,\underline{\text{in}}}$ и $A_\mu(x)^{\,\underline{\text{out}}}$. Здесь уже $\underline{\text{in}}$ и $\underline{\text{out}}$ — векторы инвариантного фазового пространства Z^4 . Эти векторы естественно назвать in- и out- состояниями. Разность этих двух векторов отвечает излучённому полю:

$$\underline{\text{out}} - \underline{\text{in}} = \underline{\text{rad}} \ .$$

Чтобы найти поле $A_\mu(x)^{\,\underline{\text{rad}}}$, нужно формулу Лиенара-Вихерта (29) слегка подправить:

$$A_\mu(x)^{\,\underline{\text{rad}}} = \int d^4x' \, D_0(x-x') \, J^\alpha_\mu(x') \ .$$

В фурье-представлении эта формула записывается особенно просто:

$$\widetilde{A}_\mu(k)^{\,\underline{\text{rad}}} = i \, \varepsilon(k) \cdot 2\pi \, \delta(k^2) \cdot \widetilde{J}^\alpha_\mu(k) \ ,$$

или, с использованием несингулярной функции $a_\mu(k)$ на световом конусе, ещё короче:

$$a_\mu(k)^{\,\underline{\text{rad}}} = i \, \varepsilon(k) \, \widetilde{J}^\alpha_\mu(k) \ . \tag{30}$$

Видно, что в приведённых формулах можно перейти к адиабатическому пределу. При этом множество всех возможных векторов $\underline{\text{rad}}$ образует линейное подпространство инвариантного фазового пространства Z^4 . Обозначим его как $Z^\perp$. Как было разъяснено в пункте 6, при адиабатическом включении и выключении взаимодействия условие Лоренца не нарушается. Поэтому пространство $Z^\perp$ не совпадает со всем Z^4 . С другой стороны, из формулы (30) следует, что кроме условия Лоренца никаким другим условием пространство $Z^\perp$ не ограничено. Таким образом, $Z^\perp$ — это подпространство пространства Z^4 , выделяемое условием Лоренца:

$$\underline{\text{rad}} \in Z^\perp \quad \Longleftrightarrow \quad -i \, k_\mu \, a_\mu(k)^{\,\underline{\text{rad}}} = 0 \ . \tag{31}$$

Этим объясняется обозначение $Z^{\perp}$.

Естественно считать, что все возможные in-состояния когда-то были созданы из вакуума при взаимодействии с токами. Тогда векторы in- и out- полей также принадлежат подпространству $Z^{\perp}$. Поскольку все возможные поля излучения заполняют всё $Z^{\perp}$, то все возможные in- и out- поля его тоже заполняют.

Подставляя условие (31) в формулу (28) для вектора энергии-импульса, замечаем, что состояния из пространства $Z^{\perp}$ обладают неотрицательной энергией.

10. Остатки калибровочной инвариантности. Рассмотрим теперь такой вектор $\underline{\text{gauge}} \in Z$, что величину $a_\mu(k)^{\underline{\text{gauge}}}$ можно записать в виде:

$$a_\mu(k)^{\underline{\text{gauge}}} = -\,i\,k_\mu\,\lambda(k) \ ,$$

где $\lambda(k)$ — некоторая функция на световом конусе. Множество векторов такого вида образует линейное подпространство в Z^4 . Обозначим это подпространство $Z^{\parallel}$. Очевидно, $Z^{\parallel}$ содержится в $Z^{\perp}$.

Рассмотрим опять рассеяние частиц и поля, когда движение частиц заранее не задано, и присутствует, вообще говоря, ненулевое in-поле. Это рассеяние описывается лагранжианом:

$$L = L^{\text{particles}} - \tfrac{1}{2}\,\partial_\mu A_\nu\,\partial_\mu A_\nu - \alpha\,J_\mu\,A_\mu \ .$$

Будем считать, что соответствующие уравнения движения разрешимы, и траектории частиц и поле $A_\mu(x)$, для которых действие стационарно, найдены. И будем также считать, что адиабатическое включение (выключение) взаимодействия происходит в столь удалённом прошлом (будущем), что все частицы находятся далеко друг от друга, поле $A_\mu(k)^{\underline{\text{in}}}$ ($A_\mu(k)^{\underline{\text{out}}}$) находится в основном далеко от всех частиц и поле $A_\mu(k)^{\underline{\text{gauge}}}$ также находится далеко от всех частиц.

Добавим теперь к полю $A_\mu(x)$ поле $A_\mu(x)^{\underline{\text{gauge}}}$. Иными словами, совершим калибровочное преобразование:

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x) \ , \tag{32}$$

где $\Lambda(x)$ — функция, фурье-образ которой связан с $\lambda(k)$ соотношением:

$$\widetilde{\Lambda}(k) = 2\pi\,\delta(k^2)\cdot\lambda(k) \ .$$

В области, где взаимодействие включается или выключается, эта добавка на стационарность действия повлиять не может. В самом деле, поскольку частицы находятся вне области, где эта добавка присутствует, вариации членов $L^{\text{particles}}$ и $-\,\alpha\,J_\mu\,A_\mu$ измениться не могут. Член же $-\,\frac{1}{2}\,\partial_\mu A_\nu\,\partial_\mu A_\nu$ отличается от калибровочно-инвариантного на полную дивергенцию, которая изменить вариацию не может, и на член $-\,\frac{1}{2}\,(\partial_\mu A_\mu)^2$, вариация которого равна нулю, т. к. $\partial_\mu A_\mu = 0$.

Рассмотрим теперь область, где взаимодействие полностью включено. При преобразовании (32) вариации членов $L^{\text{particles}}$ и $-\,\frac{1}{2}\,\partial_\mu A_\nu\,\partial_\mu A_\nu$ измениться не могут по тем же самым причинам, что и в случае областей, где взаимодействие включается или выключается. Остаётся член $-\,J_\mu\,A_\mu$. При калибровочном преобразовании (32) он переходит в $-\,J_\mu\,A_\mu -\ J_\mu\,\partial_\mu\Lambda(x)$. Следовательно, в вариации действия появляется дополнительный член $-\,\delta J_\mu\,\partial_\mu\Lambda(x)$. Интегрируя его по частям и учитывая сохранение тока, получаем, что он дополнительного вклада в вариацию не даёт.

Таким образом, при преобразовании (32) движения, удовлетворяющие условию стационарности действия, переходят в движения также удовлетворяющие этому условию. Можно сказать, что подпространство $Z^{\parallel}$ в процессе рассеяния фактически никак не участвует.

Естественно предположить, что состояния рассеяния электромагнитного поля наблюдаются только по их влиянию на заряженные частицы. Тогда любые два вектора из $Z^{\perp}$, отличающиеся на вектор из $Z^{\parallel}$, физически неразличимы. Следовательно, вместо пространства $Z^{\perp}$ можно рассматривать факторпространство $Z^{\perp/\parallel} = Z^{\perp}/Z^{\parallel}$.

Заметим теперь, что в фурье-представлении пространство $Z^{\perp/\parallel}$ можно рассматривать как множество функций $a_\mu(k)$ на световом конусе $k^2 = 0$, удовлетворяющих условию Лоренца $-\,i\,k_\mu\,a_\mu(k) = 0$ и рассматриваемых с точностью до калибровочного преобразования:

$$a_\mu(k) \ \sim \ a_\mu(k) - i\,k_\mu\,\lambda(k) \ .$$

Следовательно, можно установить естественное взаимно-однозначное соответствие между элементами пространств $Z^{\perp/\parallel}$ и Z^{phys} .

Более того, пространство $Z^{\perp/\parallel}$ естественным образом наследует из полного пространства Z^4 симплектическую структуру (23), и эта структура, очевидно, совпадает с симплектической структурой пространства Z^{phys}, даваемой формулой (17). Таким образом, $Z^{\perp/\parallel}$ и Z^{phys} естественно отождествляются и как *симплектические* пространства.

11. О скобке Пуассона на $Z^{\perp/\parallel}$. Рассмотрим теперь на пространстве Z^4 линейную функцию $\widetilde{F}_{\mu\rho}(k)\dot{-}$ (или $F_{\mu\rho}(x)\dot{-}$). При этом k (или, соответственно, x) считается фиксированным. Как было сказано в пункте 3, эта функция является генератором векторного поля на Z^4.

Заметим, во-первых, что поскольку рассматриваемая функция линейна на Z^4, её дифференциал не зависит от точки пространства Z^4 (и совпадает с самой этой функцией). Следовательно, полученное векторное поле постоянно на всём пространстве Z^4.

Во-вторых, дифференциал рассматриваемой функции, как и сама функция, обращается в нуль на $Z^{\parallel}$. Поэтому, как видно из формулы для симплектической структуры (23), вектор полученного постоянного поля лежит в подпространстве $Z^{\perp}$.

Из этих двух утверждений следует, что полученное поле естественным образом сужается на факторпространство $Z^{\perp/\parallel}$.

С другой стороны, пространство $Z^{\perp/\parallel}$ само наделено симплектической структурой. Если сузить функцию $\widetilde{F}_{\mu\rho}(k)\dot{-}$ (или $F_{\mu\rho}(x)\dot{-}$) на это факторпространство, то полученная функция сама будет генератором некоторого векторного поля в $Z^{\perp/\parallel}$.

Однако поскольку симплектическая структура в $Z^{\perp/\parallel}$ наследуется из Z^4, легко видеть, что оба полученных векторных поля в $Z^{\perp/\parallel}$ совпадают.

Отсюда также следует, что формулы (26) и (27), полученные в пункте 7 для „нефизического“ поля, годятся и для „физического“.

Список литературы

[1] V. A. Fock “Konfigurationsraum und zweite Quantelung”, Z. Phys. **75**, 622-647 (1932). [„Конфигурационное пространство и вторичное квантование“, в сб. [2], стр. 25-51.]

[2] В. А. Фок *„Работы по квантовой теории поля“*, Л.: изд-во ЛГУ (1957).

[3] S. Weinberg *“The quantum theory of fields”*, v. 1: *“Foundations”*, Cambridge univ. press (1996).

[4] N. Bohr, L. Rosenfeld “Zur Frage der Messbarkeit der elektromagnetischen Feldgrössen”, Kgl. Danske Vidensk. Selskab., Math.-Fys. Medd. **12**(8), 3-65 (1933). [„К вопросу об измеримости электромагнитного поля“, в сб.: [5], т. 2, стр. 120-162.]

[5] Н. Бор *„Избранные научные труды“*, т. 2, М.: Наука (1971).

[6] В. И. Огиевецкий, Л. Мезинческу „Симметрия между бозонами и фермионами и суперполя“, УФН **117**(4), 637-683 (1975).

[7] E. Witten “Interacting field theory of open superstrings”, Nucl. Phys. **B276**, 291-324 (1986).

[8] Č. Crnković “Symplectic geometry and (super-) Poincaré algebra in geometrical theories”, Nucl. Phys. **B288**, 419-430 (1987).

[9] G. J. Zuckerman “Action principles and global geometry”, in *Mathematical aspects of string theory*, ed. S. T. Yau, Singapore: World scientific, 259-284 (1987).

[10] Č. Crnković, E. Witten “Covariant description of canonical formalism in geometrical theories”, in *Three hundred years of gravitation*, eds. S. W. Hawking, W. Israel, Cambridge: Cambridge univ. press, 676-684 (1987).

[11] Č. Crnković “Symplectic geometry of the covariant phase-space”, Class. Quant. Grav. **5**(12), 1557-1575 (1988).

[12] G. Barnich, M. Henneaux, C. Schomblond “Covariant description of the canonical formalism”, Phys. Rev. D **44**(4), R939-R941 (1991).

[13] В. И. Арнольд *„Математические методы классической механики“*, М.: Наука (1989).

[14] W. Heisenberg, W. Pauli "Zur Quantendynamik der Wellenfelder", Z. Phys. **56**(1/2), 1-61 (1929). [„К квантовой динамике волновых полей", см. в сб. [15], стр. 30-88.]

[15] В. Паули *„Труды по квантовой теории"*, т. 2, М.: Наука (1977).

[16] S. N. Gupta "Theory of longitudinal photons in quantum electrodynamics", Proc. Phys. Soc. A **63**(7), 681-691 (1950).

[17] S. N. Gupta "Quantum mechanics with an indefinite metric", Can. J. Phys. **35**(8), 961-968 (1957).

[18] К. Надь *„Пространства состояний с индефинитной метрикой в квантовой теории поля"*, М.: Мир (1969). [K. L. Nagy *"State vector spaces with indefinite metric in quantum field theory"*, Budapest: Académiai Kiadó (1966).]

[19] R. Haag *"Lectures in theoretical physics"*, Sommer Institute for Th. Phys., Boulder, New York (1961). (цит. по [18])